2000年京大後期理$\boxed{2}$

(1)

$g(x)=e^x-\left(1+\dfrac{1}{2}x^2\right)$ とすると　$g'(x)=e^x-x$　$g''(x)=e^x-1$

$x \geqq 0$ のとき、$g''(x) \geqq 0$ であるから、$g'(x)$ は単調増加。

$g'(0)=1$ より、$g'(x)>0$ であるから、$g(x)$ は単調増加。

$g(0)=0$ より　$g(x) \geqq 0$　$\therefore e^x \geqq 1+\dfrac{1}{2}x^2$　（証明終）

(2)

$$f_n(x)=n^2(x-1)e^{-nx} \quad f_n'(x)=n^2e^{-nx}-n^3(x-1)e^{-nx}=n^2\{1-n(x-1)\}e^{-nx}=n^2(n+1-nx)e^{-nx}$$

$f_n(x)$ の増減は右の通りで、$x=1+\dfrac{1}{n}$ のとき極大。

$f_n(1)=0$ であるから、$f_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)>0$ である。

x	0	$\cdots$	$1+\frac{1}{n}$	$\cdots$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$
$f_n(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$M_n=f_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=n^2\cdot\dfrac{1}{n}\cdot e^{-(n+1)}=n\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n+1}$ より、$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}M_k$ とすると

$$S_n-\frac{1}{e}S_n=\left\{\left(\frac{1}{e}\right)^2+\left(\frac{1}{e}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right\}-n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+2}=\frac{1}{e^2}\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}-n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+2}=\frac{1}{e(e-1)}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{e}\right)^{n+2}$$

$$\therefore S_n=\frac{1}{(e-1)^2}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}-\frac{1}{e-1}\cdot\frac{n}{e^{n+1}}$$

ここで、(1) より　$0<\dfrac{n}{e^n}<\dfrac{n}{1+\frac{1}{2}n^2}$　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+\frac{1}{2}n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\frac{2}{n}+n}=0$ であるから、はさみうちの原理より

$\displaystyle\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^n}=0$　したがって　$\displaystyle\therefore \sum_{n=1}^{\infty}M_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{(e-1)^2}$　……(答)