2000 年京大後期理 $\boxed{3}$

(1)

例えば、 $(-ak,\ k)$ ……(答)

(2)

直線 L の式を変形すると　$a(x+ak)=(a^2+1)(k-y)$

ここで、 $p,\ q,\ m$ を自然数として、 $a=pm,\ a^2+1=qm$ とすると

$p^2m^2+1=qm$　$1=qm-pm^2=(q-pm)m$

m は1の約数であるから、 $m=1$ しかあり得ない。したがって、 a と a^2+1 は互いに素。

n を整数として、 $x+ak=(a^2+1)n,\ k-y=an$ と表せるから、直線 L 上の格子点の一般形は

$\therefore x=(a^2+1)n-ak,\ y=k-an$

$k=a(a^2+1)$ のとき　$x=(a^2+1)(n-a^2),\ y=a(a^2+1-n)$

$x>0,\ y>0$ とすると　$n-a^2>0,\ a^2+1-n>0$　$\therefore a^2<n<a^2+1$ ——①

$a^2,\ a^2+1$ は整数かつ差が1であるから、①を満たす整数 n は存在しない。

したがって、 $x>0,\ y>0$ であるような直線 L 上の格子点は存在しない。(証明終)

(3)

$x=(a^2+1)n-ak>0,\ y=k-an>0$ とすると　$ak<(a^2+1)n,\ an<k$　$\therefore \dfrac{ak}{a^2+1}<n<\dfrac{k}{a}$ ——②

$\dfrac{k}{a}-\dfrac{ak}{a^2+1}=\dfrac{a^2+1-a^2}{a(a^2+1)}k=\dfrac{k}{a(a^2+1)}$ であるから、 $k>a(a^2+1)$ のとき　$\therefore \dfrac{k}{a}-\dfrac{ak}{a^2+1}>1$

このとき、②を満たす整数 n が、必ず存在する。

したがって、 $x>0,\ y>0$ であるような直線 L 上の格子点が存在する。(証明終)