2000年京大後期理 $\boxed{4}$

(1)

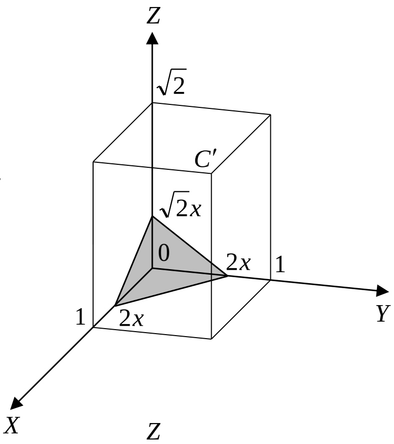
XYZ 座標空間において、以下のように座標をおく。

$A(0,\ 0,\ 0),\ B(1,\ 0,\ 0),\ C(1,\ 0,\ \sqrt{2}),\ D(0,\ 0,\ \sqrt{2}),\ A'(0,\ 1,\ 0),\ B'(1,\ 1,\ 0),\ C'(1,\ 1,\ \sqrt{2}),\ D'(0,\ 1,\ \sqrt{2})$

$\overrightarrow{AC'}=(1,\ 1,\ \sqrt{2})$ で、$AC'=2$ であるから、線分 AC' 上の点 $P\left(\dfrac{x}{2},\ \dfrac{x}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)$ $(0\leqq x\leqq 2)$ を通り、AC' と垂直な平面 α の式は $\left(X-\dfrac{x}{2}\right)+\left(Y-\dfrac{x}{2}\right)+\sqrt{2}\left(X-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)=0 \quad \therefore X+Y+\sqrt{2}Z=2x$ ——①

P が AC' の中点であるとき、$x=1$ であり、α は $X+Y+\sqrt{2}Z=2$ となる。

これは $B'(1,\ 1,\ 0),\ D(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ を通る。（証明終）

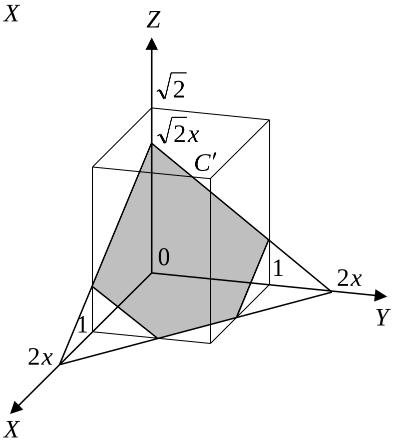


(2)

対称性より、$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で考える。①より、α と $X,\ Y,\ Z$ 軸との交点を、$Q,\ R,\ S$ とすると、$Q(2x,\ 0,\ 0),\ R(0,\ 2x,\ 0),\ S(0,\ 0,\ \sqrt{2}x)$ である。

$0\leqq x\leqq \dfrac{1}{2}$ のとき　$Q,\ R,\ S$ はそれぞれ辺 $AB,\ AA',\ AD$ 上にあり、切り口の形状は三角形である。四面体 $AQRS$ の体積は　$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 4x^2\cdot\sqrt{2}x=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}x^3$

$AP=x$ であるから　$\dfrac{1}{3}xS(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}x^3 \quad \therefore S(x)=2\sqrt{2}x^2$



$\dfrac{1}{2}<x\leqq 1$ のとき　$Q,\ R$ は直方体の外部にあり、S は AD 上にある。

このとき、$\triangle QRS$ から直方体によって切り取られる2つの三角形は、$\triangle QRS$ と相似であり、相似比は $\dfrac{2x-1}{2x}$ であるから、

$$\therefore S(x)=2\sqrt{2}x^2\left\{1-2\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^2\right\}=2\sqrt{2}x^2-\sqrt{2}(2x-1)^2=\sqrt{2}(-2x^2+4x-1)$$

$1\leqq x$ のとき、対称性により

$1\leqq x<\dfrac{3}{2}$ のとき　$S(x)=\sqrt{2}\{-2(2-x)^2+4(2-x)-1\}=\sqrt{2}(-2x^2+4x-1)$

$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 2$ のとき　$S(x)=2\sqrt{2}(2-x)^2$

以上まとめて　$S(x)=\begin{cases} 2\sqrt{2}x^2 & 0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2}(-2x^2-4x-1) & \dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2} \\ 2\sqrt{2}(2-x)^2 & \dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 2 \end{cases}$ ……（答）