2000年京大後期理 $\boxed{6}$

(1)

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ であるから、$x=1$ における法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(1)}=-2$

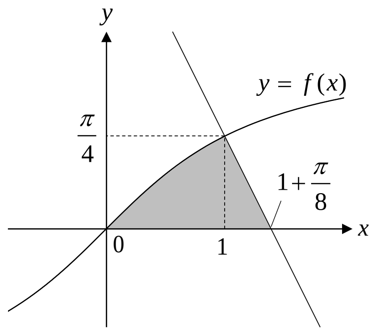
$f(1)$ を求める。$t=\tan\theta$ とおくと $dt=\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$f(1)=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

求める法線の方程式は $y=-2(x-1)+\dfrac{\pi}{4}$ $\therefore y=-2x+2+\dfrac{\pi}{4}$ ……(答)

(2)

$f'(x)>0$ より、$f(x)$ は単調増加。$f(0)=0$ であるから、求める面積は



$$\int_0^1 f(x)dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{8}$$
$$=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx+\frac{\pi^2}{64}=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{\pi^2}{64}$$
$$=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{64}-\left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_0^1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{64}-\frac{1}{2}\log 2$$ ……(答)

(注)

$f(x)$ は $\tan x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の逆関数であり、$y=f(x)$ とすると、$x=\tan y\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。

(2)は、以下のように $\tan y$ の積分で求めることも可能。

$$1\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{8}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan y\,dy=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{64}-\left[-\log(\cos y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{64}-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{64}-\frac{1}{2}\log 2$$