2000年京大理 $\boxed{2}$

(1)

$\sqrt{x}=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ とすると　$2x-a\sqrt{x}+a-1=0$

$f(t)=2t^2-at+a-1$ とおき、$f(t)=0$ が、非負実数解を持つ条件を考えればよい。

ｉ）$f(0)=a-1\leqq 0$ のとき

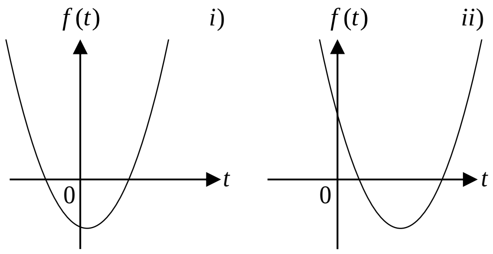
少なくとも１つの非負実数解を持つ。　$\therefore 0<a\leqq 1$ ——①

ｉｉ）$f(0)=a-1>0$ のとき　軸 $\dfrac{a}{4}>0$ であるから

$D=a^2-8(a-1)=a^2-8a+8\geqq 0$　$a\leqq 4-2\sqrt{2},\ 4+2\sqrt{2}\leqq a$

$a\leqq 2$ より　$\therefore 1<a\leqq 4-2\sqrt{2}$ ——②

①、②より　$\therefore 0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$ ……(答)



(2)

$(2x+a-1)^2=a^2x$　整理すると　$4x^2-(a-2)^2x+(a-1)^2=0$ ——③

$D=(a-2)^4-16(a-1)^2=\{(a-2)^2+4(a-1)\}\{(a-2)^2-4(a-1)\}=a^2(a^2-8a+8)$

$0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$ のとき、$D\geqq 0$ であり、③は重解を含む２つの実数解を持つ。

$4-2\sqrt{2}<a\leqq 2$ のとき、$D<0$ であり、③は虚数解を持つ。

$0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$ のとき　$x=\dfrac{(a-2)^2\pm\sqrt{D}}{8}=\dfrac{(a-2)^2\pm a\sqrt{a^2-8a+8}}{8}$

$|\alpha|\leqq|\beta|$ より　$|\beta|=\beta=\dfrac{(a-2)^2+a\sqrt{a^2-8a+8}}{8}\geqq\dfrac{(a-2)^2}{8}$

$0<a\leqq 4-2\sqrt{2}<2$ のとき、$\dfrac{(a-2)^2}{8}$ は単調減少であるから　$\therefore |\beta|\geqq\dfrac{(a-2)^2}{8}\geqq\dfrac{(2-2\sqrt{2})^2}{8}=\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{2}=\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$

等号は $a=4-2\sqrt{2}$ のとき成立。

$4-2\sqrt{2}<a\leqq 2$ のとき　$\alpha,\ \beta$ は共役な複素数であり、$|\alpha|=|\beta|$ である。

$\alpha=\overline{\beta}$ であるから　$|\beta|^2=\beta\overline{\beta}=\alpha\beta$　解と係数の関係より　$|\beta|^2=\alpha\beta=\dfrac{(a-1)^2}{4}$

$1<4-2\sqrt{2}<a\leqq 2$ のとき　$|\beta|=\dfrac{a-1}{2}$　$\therefore \dfrac{3}{2}-\sqrt{2}<|\beta|\leqq\dfrac{1}{2}$

以上により、$|\beta|$ の最小値は　$\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$ ……(答)

※(2)は、$|\beta|$ の式を a で微分しようとすると、泥沼にはまる。