2000 年京大理$\boxed{6}$

(1)

サイコロを n 回振り、出た目の和を 5 で割った余りを $k(n)$ と表す。

$n+1$ 回目に出た目によって、$k(n+1)$ がどうなるかを調べると

$k(n)=0$ のとき　$1,6 \to k(n+1)=1$　$2 \to k(n+1)=2$　$3 \to k(n+1)=3$　$4 \to k(n+1)=4$　$5 \to k(n+1)=0$

$k(n)=1$ のとき　$1,6 \to k(n+1)=2$　$2 \to k(n+1)=3$　$3 \to k(n+1)=4$　$4 \to k(n+1)=0$　$5 \to k(n+1)=1$

$k(n)=2$ のとき　$1,6 \to k(n+1)=3$　$2 \to k(n+1)=4$　$3 \to k(n+1)=0$　$4 \to k(n+1)=1$　$5 \to k(n+1)=2$

$k(n)=3$ のとき　$1,6 \to k(n+1)=4$　$2 \to k(n+1)=0$　$3 \to k(n+1)=1$　$4 \to k(n+1)=2$　$5 \to k(n+1)=3$

$k(n)=4$ のとき　$1,6 \to k(n+1)=0$　$2 \to k(n+1)=1$　$3 \to k(n+1)=2$　$4 \to k(n+1)=3$　$5 \to k(n+1)=4$

これらにより

$$\therefore \begin{cases} p_{n+1}(0)=\dfrac{1}{6}p_n(0)+\dfrac{1}{6}p_1(1)+\dfrac{1}{6}p_n(2)+\dfrac{1}{6}p_n(3)+\dfrac{1}{3}p_n(4) \\ p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{3}p_n(0)+\dfrac{1}{6}p_1(1)+\dfrac{1}{6}p_n(2)+\dfrac{1}{6}p_n(3)+\dfrac{1}{6}p_n(4) \\ p_{n+1}(2)=\dfrac{1}{6}p_n(0)+\dfrac{1}{3}p_1(1)+\dfrac{1}{6}p_n(2)+\dfrac{1}{6}p_n(3)+\dfrac{1}{6}p_n(4) \\ p_{n+1}(3)=\dfrac{1}{6}p_n(0)+\dfrac{1}{6}p_1(1)+\dfrac{1}{3}p_n(2)+\dfrac{1}{6}p_n(3)+\dfrac{1}{6}p_n(4) \\ p_{n+1}(4)=\dfrac{1}{6}p_n(0)+\dfrac{1}{6}p_1(1)+\dfrac{1}{6}p_n(2)+\dfrac{1}{3}p_n(3)+\dfrac{1}{6}p_n(4) \end{cases} \cdots\cdots(答)$$

(2)

$p_n(0)+p_1(1)+p_n(2)+p_n(3)+p_n(4)=1$ かつ $5m_n \leqq p_n(0)+p_1(1)+p_n(2)+p_n(3)+p_n(4) \leqq 5M_n$ であるから

$\therefore m_n \leqq \dfrac{1}{5} \leqq M_n$　（証明終）

また、$p_n(0)+p_1(1)+p_n(2)+p_n(3)=1-p_n(4)$ より　$p_{n+1}(0)=\dfrac{1}{6}\{1-p_n(4)\}+\dfrac{1}{3}p_n(4)=\dfrac{1}{6}p_n(4)+\dfrac{1}{6}$

同様にして　$p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{6}p_n(0)+\dfrac{1}{6},\ p_{n+1}(2)=\dfrac{1}{6}p_n(1)+\dfrac{1}{6},\ p_{n+1}(3)=\dfrac{1}{6}p_n(2)+\dfrac{1}{6},\ p_{n+1}(4)=\dfrac{1}{6}p_n(3)+\dfrac{1}{6}$

したがって、いかなる k, l についても、$p_{n+1}(k)-p_{n+1}(l)=\dfrac{1}{6}\{p_n(i)-p_n(j)\}\ (0 \leqq i,\ j \leqq 4)$ という形になり、

$p_n(i) \leqq M_n,\ m_n \leqq p_n(j)$ であるから　$\therefore p_{n+1}(k)-p_{n+1}(l) \leqq \dfrac{1}{6}(M_n-m_n)$　（証明終）

$p_{n+1}(k)-p_{n+1}(l) \leqq 0$ であっても成立。

(3)

$p_n(k)-p_n(l) \leqq M_n-m_n \leqq \dfrac{1}{6}(M_{n-1}-m_{n-1})$ であるから、繰り返し用いると

$$M_n-m_n \leqq \frac{1}{6}(M_{n-1}-m_{n-1}) \leqq \left(\frac{1}{6}\right)^2(M_{n-2}-m_{n-2}) \leqq \cdots \leqq \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}(M_1-m_1)$$

$p_1(1)=\dfrac{1}{3},\ p_1(0)=p_1(2)=p_1(3)=p_1(4)=\dfrac{1}{6}$ より、$M_1=\dfrac{1}{3},\ m_1=\dfrac{1}{6}$ であるから　$\therefore 0 \leqq M_n - m_n \leqq \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

はさみうちの原理により　$\therefore \lim_{n\to\infty}(M_n - m_n)=0$

$m_n \leqq \dfrac{1}{5} \leqq M_n$ より　$\therefore \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} m_n = \dfrac{1}{5}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} p_n(k)=\dfrac{1}{5}\ (0 \leqq k \leqq 4)$ ……（答）

（注）

$p_n(k)$ を具体的に求めると、以下の通り。

n を 5 で割った余りが $r\ (0 \leqq r \leqq 4)$ であるとき

$$p_n(k)=\begin{cases} \dfrac{1}{5}\left\{1+4\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right\} & k=r \\ \dfrac{1}{5}\left\{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right\} & k \neq r \end{cases}$$

これより、すべての n について　$M_n=\dfrac{1}{5}\left\{1+4\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right\},\ m_n=\dfrac{1}{5}\left\{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$　$M_n - m_n = \left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

普通に漸化式を解く方が考えやすいかもしれない。