2000 年京大理 $\boxed{3}$ 文 $\boxed{3}$ 共通

(1)

$\vec{c}=(p,\ q,\ r)$ とすると　$\vec{a}\cdot\vec{c}=p=\cos\alpha$　$\vec{b}\cdot\vec{c}=p\cos\dfrac{\pi}{3}+q\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{p+\sqrt{3}q}{2}=\cos\beta$

$$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=p^2-\frac{p^2+\sqrt{3}pq}{2}+\frac{p^2+2\sqrt{3}pq+3q^2}{4}=\frac{3}{4}(p^2+q^2)$$

$\left|\vec{c}\right|^2=p^2+q^2+r^2=1$ より　$r^2=1-(p^2+q^2)\geqq 0$　$\therefore 0\leqq p^2+q^2\leqq 1$

したがって　$\therefore \cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\leqq\dfrac{3}{4}$　（証明終）　等号は、$r=0$ のとき成立。

(2)

$\cos^2\beta-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha-\dfrac{3}{4}=0$ を、$\cos\beta$ について解く。$0\leqq\alpha\leqq\pi$ より、$\sin\alpha\geqq 0$ であるから

$$\cos\beta=\frac{\cos\alpha\pm\sqrt{\cos^2\alpha-(4\cos^2\alpha-3)}}{2}=\frac{\cos\alpha\pm\sqrt{3(1-\cos^2\alpha)}}{2}=\frac{\cos\alpha\pm\sqrt{3}\sin\alpha}{2}=\cos\left(\alpha\mp\frac{\pi}{3}\right)$$

$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\alpha\geqq 0$ より　$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$

したがって、$\cos^2\beta-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha-\dfrac{3}{4}\leqq 0$ のとき　$\therefore\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq\cos\beta\leqq\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)$

$0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$ より　$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq\cos\beta\leqq\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$

$0\leqq\dfrac{\pi}{3}-\alpha\leqq\dfrac{\pi}{3}\leqq\alpha+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{2}{3}\pi$　$\therefore\dfrac{\pi}{3}-\alpha\leqq\beta\leqq\alpha+\dfrac{\pi}{3}$

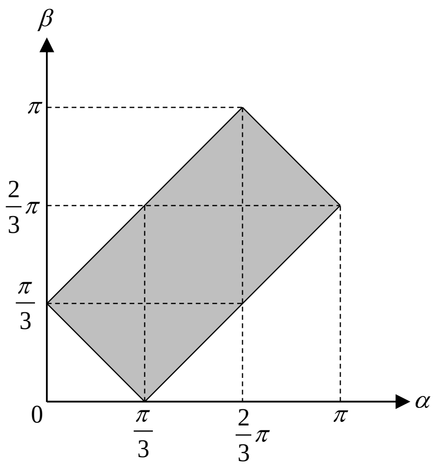
$\dfrac{\pi}{3}\leqq\alpha\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$0\leqq\alpha-\dfrac{\pi}{3}<\alpha+\dfrac{\pi}{3}\leqq\pi$　$\therefore\alpha-\dfrac{\pi}{3}\leqq\beta\leqq\alpha+\dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{2}{3}\pi\leqq\alpha\leqq\pi$ のとき　$\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\alpha-\dfrac{5}{3}\pi\right)=\cos\left(\dfrac{5}{3}\pi-\alpha\right)$ より

$$\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\alpha\right)\leqq\cos\beta\leqq\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{\pi}{3}\leqq\alpha-\frac{\pi}{3}\leqq\frac{2}{3}\pi\leqq\frac{5}{3}\pi-\alpha\leqq\pi\quad\therefore\alpha-\frac{\pi}{3}\leqq\beta\leqq\frac{5}{3}\pi-\alpha$$

$(\alpha,\ \beta)$ の範囲は右図の通りで、境界線を含む。



※理系と文系の違いは、角度の表記がラジアンか度数法かだけである。