2001 年京大後期文 $\boxed{1}$

$\left|\vec{u}\right|=1$ より

$$\left|\vec{u}+3\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}\right|^2+9\left|\vec{v}\right|^2+6\vec{u}\cdot\vec{v}=1+9\left|\vec{v}\right|^2+6\vec{u}\cdot\vec{v}=1 \quad \therefore 3\left|\vec{v}\right|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \text{ ——①}$$

$$\left|2\vec{u}+\vec{v}\right|^2=4\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2+4\vec{u}\cdot\vec{v}=4+\left|\vec{v}\right|^2+4\vec{u}\cdot\vec{v}=2 \quad \therefore \left|\vec{v}\right|^2+4\vec{u}\cdot\vec{v}=-2 \text{ ——②}$$

①、②より　$\left|\vec{v}\right|^2=\dfrac{2}{5},\ \vec{u}\cdot\vec{v}=-\dfrac{3}{5}$

$\vec{u},\ \vec{v}$ のなす角を $\theta\ (0<\theta<\pi)$ とすると

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\cos\theta=1\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}\cos\theta=-\frac{3}{5} \quad \cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}} \quad \sin^2\theta=1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10} \quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

求める△OPQの面積は　$\dfrac{1}{2}\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{10}$ ……(答)