

取り出される球の色の数が、1色である確率は $P_1 = \left(\frac{a}{N}\right)^n + \left(\frac{b}{N}\right)^n + \left(\frac{c}{N}\right)^n$

取り出される球の色が、青・赤の2色である確率は $\left(\frac{a+b}{N}\right)^n - \left(\frac{a}{N}\right)^n - \left(\frac{b}{N}\right)^n$

取り出される球の色が、赤・白の2色である確率は $\left(\frac{b+c}{N}\right)^n - \left(\frac{b}{N}\right)^n - \left(\frac{c}{N}\right)^n$

取り出される球の色が、青・白の2色である確率は $\left(\frac{c+a}{N}\right)^n - \left(\frac{c}{N}\right)^n - \left(\frac{a}{N}\right)^n$

これらを足すと、取り出される球の色の数が、2色である確率は

$$P_2 = \left(\frac{a+b}{N}\right)^n + \left(\frac{b+c}{N}\right)^n + \left(\frac{c+a}{N}\right)^n - 2\left(\frac{a}{N}\right)^n - 2\left(\frac{b}{N}\right)^n - 2\left(\frac{c}{N}\right)^n$$

余事象により、取り出される球の色の数が、3色である確率は

$$\begin{aligned} P_3 &= 1 - P_1 - P_2 = 1 - \left(\frac{a}{N}\right)^n - \left(\frac{b}{N}\right)^n - \left(\frac{c}{N}\right)^n - \left(\frac{a+b}{N}\right)^n - \left(\frac{b+c}{N}\right)^n - \left(\frac{c+a}{N}\right)^n + 2\left(\frac{a}{N}\right)^n + 2\left(\frac{b}{N}\right)^n + 2\left(\frac{c}{N}\right)^n \\ &= 1 - \left(\frac{a+b}{N}\right)^n - \left(\frac{b+c}{N}\right)^n - \left(\frac{c+a}{N}\right)^n + \left(\frac{a}{N}\right)^n + \left(\frac{b}{N}\right)^n + \left(\frac{c}{N}\right)^n \end{aligned}$$

取り出される玉の色の数の期待値 E_n は

$$\begin{aligned} E_n &= P_1 + 2P_2 + 3P_3 \\ &= \left(\frac{a}{N}\right)^n + \left(\frac{b}{N}\right)^n + \left(\frac{c}{N}\right)^n + 2\left\{\left(\frac{a+b}{N}\right)^n + \left(\frac{b+c}{N}\right)^n + \left(\frac{c+a}{N}\right)^n - 2\left(\frac{a}{N}\right)^n - 2\left(\frac{b}{N}\right)^n - 2\left(\frac{c}{N}\right)^n\right\} \\ &\quad + 3\left\{1 - \left(\frac{a+b}{N}\right)^n - \left(\frac{b+c}{N}\right)^n - \left(\frac{c+a}{N}\right)^n + \left(\frac{a}{N}\right)^n + \left(\frac{b}{N}\right)^n + \left(\frac{c}{N}\right)^n\right\} \\ &= 3 - \left(\frac{a+b}{N}\right)^n - \left(\frac{b+c}{N}\right)^n - \left(\frac{c+a}{N}\right)^n \end{aligned}$$

以上により、 $E_n = 3 - \left(\frac{a+b}{N}\right)^n - \left(\frac{b+c}{N}\right)^n - \left(\frac{c+a}{N}\right)^n$ が示された。(証明終)