

2001 年京大文 ③

$n^9 - n^3 = n^3(n^3 - 1)(n^3 + 1)$ である。

k を整数とすると

$n = 3k$ のとき $n^3 = 27k^3$ は、9 で割り切れる。

$n = 3k + 1$ のとき $n^3 - 1 = (27k^3 + 27k^2 + 9k + 1) - 1 = 9(3k^3 + 3k^2 + k)$ は、9 で割り切れる。

$n = 3k + 2$ のとき $n^3 + 1 = (27k^3 + 54k^2 + 36k + 8) + 1 = 9(3k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$ は、9 で割り切れる。

したがって、任意の整数 n について、 n^3 , $n^3 - 1$, $n^3 + 1$ のうちいずれかが 9 で割り切れるから、任意の整数 n について、 $n^9 - n^3$ は 9 で割り切れる。(証明終)