2001年京大後期理 $\boxed{5}$

(1)

Aに逆行列が存在するとき、(i)の解は$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix}$、(ii)の解は$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 4 \\ 5-s \end{pmatrix}$で与えられる。

すなわち、(i)と(ii)の両方が解を持つから、条件(*)を満たさない。

Aは逆行列を持たないので　$\det A = ad - bc = 0$

(i)を考える。　$ax + by = s$ ——①　$cx + dy = 1-s$ ——②

①× d −②× b より　$(ad-bc)x = ds - b(1-s)$

$ad - bc = 0$ であるから、$ds - b(1-s) \neq 0$ であれば、xは存在しない。

$ds - b(1-s) = 0$ であれば、xは任意。すなわち、解が存在する。

②× a −①× c より　$(ad-bc)y = a(1-s) - cs$

同様に、$a(1-s) - cs = 0$ であれば、yは任意。すなわち、解が存在する。

したがって　$b(1-s) = ds,\ a(1-s) = cs$　$\therefore b : d = a : c = s : (1-s)$

以上により、$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$は、ともに$\begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix}$の実数倍であることが示された。(証明終)

(2)

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix}$とする。このとき、①は$psx + qsy = s$、②は$p(1-s)x + q(1-s)y = 1-s$となる。

sと$1-s$のうち、少なくとも一方は0でないから　$\therefore px + qy = 1$

(i)の解は、$px + qy = 1$を満たす、すべての$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$である。ただし、$(p,\ q) \neq (0,\ 0)$である。

(ii)を考える。　$psx + qsy = 4$ ——①　$p(1-s)x + q(1-s)y = 5-s$ ——②

$s = 0$とすると、①は$0 = 4$となり、解を持たない。$s = 1$とすると、②は$0 = 4$となり、解を持たない。

$s \neq 0,\ 1$のとき、①より$px + qy = \dfrac{4}{s}$となり、②より$px + qy = \dfrac{5-s}{1-s}$となる。

$(p,\ q) \neq (0,\ 0)$であるから、$\dfrac{4}{s} \neq \dfrac{5-s}{1-s}$であれば、(ii)は解を持たない。

$\dfrac{4}{s} = \dfrac{5-s}{1-s}$のとき　$s(5-s) = 4(1-s)$　$s^2 - 9s + 4 = 0$　$s = \dfrac{9 \pm \sqrt{65}}{2}$

以上により、条件(*)を満たす2つの連立方程式ができるための、sの条件は　$\therefore s \neq \dfrac{9 \pm \sqrt{65}}{2}$　……(答)