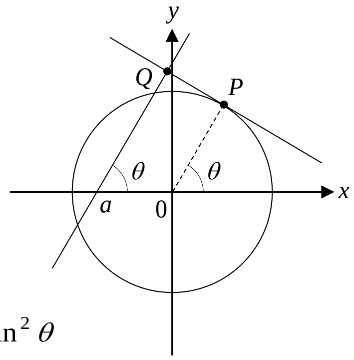
2001年京大後期理 $\boxed{6}$

C_1 上の点 $P(\cos\theta, \sin\theta)$ における接線は　$(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$ ——①



直線①と直交する直線は、$(\sin\theta)x-(\cos\theta)y=k$ と表せる。
これが $R(a, 0)$ を通るとき
　$(\sin\theta)a=k$　　$\therefore (\sin\theta)x-(\cos\theta)y=(\sin\theta)a$ ——②

①× $\cos\theta$ ＋②× $\sin\theta$ より　$(\cos^2\theta+\sin^2\theta)x=\cos\theta+a\sin^2\theta$　　$\therefore x=\cos\theta+a\sin^2\theta$
①× $\sin\theta$ －②× $\cos\theta$ より　$(\sin^2\theta+\cos^2\theta)y=\sin\theta-a\sin\theta\cos\theta$　　$\therefore y=\sin\theta-a\sin\theta\cos\theta$

$x=\cos\theta+a(1-\cos^2\theta)=-a\left(\cos^2\theta-\dfrac{1}{a}\cos\theta\right)+a=-a\left(\cos\theta-\dfrac{1}{2a}\right)^2+a+\dfrac{1}{4a}$ であり、

$-1<a<-\dfrac{1}{2}$ より、$-2<2a<-1$、$-1<\dfrac{1}{2a}<-\dfrac{1}{2}$ であるから、x は $\cos\theta=\dfrac{1}{2a}$ のとき最小値 $a+\dfrac{1}{4a}$ をとる。

$f(a)=a+\dfrac{1}{4a}$ とすると　$f'(a)=1-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{(2a+1)(2a-1)}{4a^2}>0$

$f(a)$ は $-1<a<-\dfrac{1}{2}$ において単調増加であるから　$-1-\dfrac{1}{4}<f(a)<-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}$　　$\therefore -\dfrac{5}{4}<f(a)<-1$

したがって、x の最小値は -1 より小さい。（証明終）

（解答 1）

対称性より、$0\leqq\theta\leqq\pi$ で考える。$\dfrac{dx}{d\theta}=2a\left(\cos\theta-\dfrac{1}{2a}\right)\sin\theta$ である。

$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos\theta-a(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=-2a\cos^2\theta+\cos\theta+a=-2a\left(\cos\theta-\dfrac{1}{4a}\right)^2+a+\dfrac{1}{8a}$ より

$\cos\theta=1$ のとき $\dfrac{dy}{d\theta}=1-a>0$、$\cos\theta=0$ のとき $\dfrac{dy}{d\theta}=a<0$、$\cos\theta=-1$ のとき $\dfrac{dy}{d\theta}=-1-a<0$

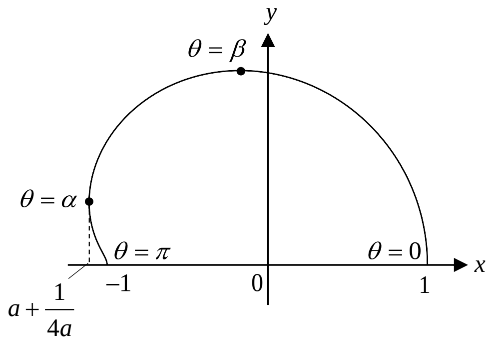
$-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{4a}<-\dfrac{1}{4}$ であるから、$\cos\theta=\dfrac{1}{4a}$ のとき、$\dfrac{dy}{d\theta}$ は最小値 $a+\dfrac{1}{8a}<0$ をとる。

$0<\cos\theta<1$ の範囲で、$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる $\cos\theta$ がただ 1 つ存在する。このとき、$\theta=\beta\ \left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

$0\leqq\theta\leqq\pi$ において、$\cos\theta$ は単調減少であるから、x, y の増減は以下のようになる。

θ	0	$\cdots$	β	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	－	－	－	0	＋	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$		＋	0	－	－	－	
x	1	↘	↘	↘		↗	-1
y	0	↗		↘	↘	↘	0

C_2 の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の概形は、右図の通り。
$0 \leqq \theta \leqq \alpha$ のとき $y = y_1$、$\alpha \leqq \theta \leqq \pi$ のとき $y = y_2$ とすると、
求める面積は



$$2\int_{a+\frac{1}{4a}}^{1} y_1 dx - 2\int_{a+\frac{1}{4a}}^{-1} y_2 dx$$
$$= 2\int_{\alpha}^{0} y_1 \left(\frac{dx}{d\theta}\right) d\theta - 2\int_{\alpha}^{\pi} y_2 \left(\frac{dx}{d\theta}\right) d\theta = -2\int_{0}^{\pi} y \left(\frac{dx}{d\theta}\right) d\theta$$
$$= -2\int_{0}^{\pi} (1 - a\cos\theta)(2a\cos\theta - 1)\sin^2\theta d\theta$$
$$= \int_{0}^{\pi} (2a^2\cos^2\theta - 3a\cos\theta + 1)(1 - \cos 2\theta) d\theta = \int_{0}^{\pi} (a^2 + 1 + a^2\cos 2\theta - 3a\cos\theta)(1 - \cos 2\theta) d\theta$$
$$= \int_{0}^{\pi} (a^2 + 1 + a^2\cos 2\theta - 3a\cos\theta - (a^2 + 1)\cos 2\theta - a^2\cos^2 2\theta + 3a\cos\theta\cos 2\theta) d\theta$$
$$= \int_{0}^{\pi} \left(a^2 + 1 - 3a\cos\theta - \cos 2\theta - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2\cos 4\theta + \frac{3}{2}a\cos 3\theta + \frac{3}{2}a\cos\theta\right) d\theta$$
$$= \int_{0}^{\pi} \left(\frac{1}{2}a^2 + 1 - \frac{3}{2}a\cos\theta - \cos 2\theta + \frac{3}{2}a\cos 3\theta - \frac{1}{2}a^2\cos 4\theta\right) d\theta$$
$$= \left[\left(\frac{1}{2}a^2 + 1\right)\theta - \frac{3}{2}a\sin\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{2}a\sin 3\theta - \frac{1}{8}a^2\sin 4\theta\right]_0^{\pi} = \left(\frac{1}{2}a^2 + 1\right)\pi \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(解答 2)
$x - a = \cos\theta - a(1 - \sin^2\theta) = (1 - a\cos\theta)\cos\theta$ より　$\therefore x - a = (1 - a\cos\theta)\cos\theta,\ y = (1 - a\cos\theta)\sin\theta$
これより、C_2 を x 方向に $-a$ 移動した曲線は、極座標で $r = 1 - a\cos\theta$ と表せる。
C_2 を x 方向に $-a$ 移動しても、囲まれる面積は変わらないから、求める面積は

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 - 2a\cos\theta + a^2\cos^2\theta) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(1 - 2a\cos\theta + a^2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}a^2 + 1 - 2a\cos\theta + \frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}a^2 + 1\right)\theta - 2a\sin\theta + \frac{1}{4}a^2\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$
$$= \left(\frac{1}{2}a^2 + 1\right)\pi \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

(注)
C_2 の概形をきちんと論証して描くのは面倒だが、Q の x 座標の最小値について議論させていることから、極座標の面積公式の使用が許されるのかは、グレーな気がする。大雑把な説明としては、以下の通り。
偏角が θ から $\theta + d\theta$ まで動くとき、$d\theta$ が十分小さいとすると、
$r(\theta)$ は一定であり、線分 OQ が通過する部分は、半径 $r(\theta)$、中心角 $d\theta$
の扇型と見なせるので、面積は　$\therefore dS = \frac{1}{2}\{r(\theta)\}^2 d\theta$
これを、θ について、0 から 2π まで積分すればよい。
また、三角形の面積で近似してもよい。