2001 年京大理 $\boxed{1}$

$y=x^3$ 上の点 $P(t,\ t^3)$ を通り、傾きが m である直線 M と、 $y=x^3$ が、相違なる 3 点で交わるとき

$x^3=m(x-t)+t^3$ とすると　$x^3-mx-t^3+mt=0$　$(x-t)(x^2+tx+t^2-m)=0$

$x^2+tx+t^2-m=0$ が、 $x=t$ 以外の相違なる 2 つの実数解を持つ。

$D=t^2-4(t^2-m)=4m-3t^2>0$　$4m>3t^2$　$\therefore m>\dfrac{3}{4}t^2$

また、 $x=t$ が、 $x^2+tx+t^2-m=0$ の解であるとき　$t^2+t^2+t^2-m=3t^2-m=0$　$m=3t^2$

m が満たす条件は　$\therefore m>\dfrac{3}{4}t^2,\ m\neq 3t^2$ ――①

L の傾きを m としたとき、①を満たせばよい。

P における接線の傾きは $3t^2$ であるから、結局 $m>\dfrac{3}{4}t^2$ を満たせばよい。

$3t^2=1=\tan\dfrac{\pi}{4}$ であるとき、 L は y 軸に平行な直線 $x=t$ になる。

これと $y=x^3$ の交点は、 $P(t,\ t^3)$ のみであるから、条件を満たさない。

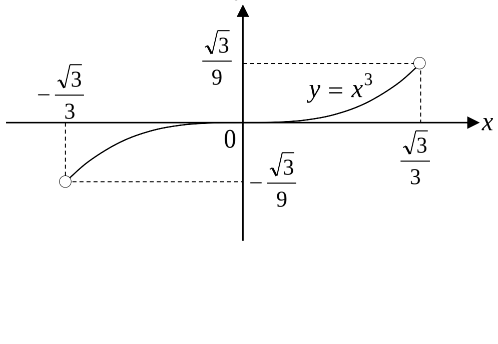
$3t^2\neq 1=\tan\alpha$ のとき　$m=\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\dfrac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\dfrac{\pi}{4}}=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}$

$\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}>\dfrac{3}{4}t^2$ とする。 $1-3t^2<0$ のとき、左辺が負、右辺が 0 以上となるから、不適。

$1-3t^2>0$ 、 $t^2<\dfrac{1}{3}$ のとき　$4+12t^2>3t^2(1-3t^2)$　$9t^4+9t^2+4>0$　これは任意の t について成立。

以上により、 t が満たすべき条件は　$t^2<\dfrac{1}{3}$　$\therefore -\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

P の存在範囲は右図の通りで、両端の点は含まない。



※ $x^3=\dfrac{1+3t^2}{1-3t^2}(x-t)+t^3$ が、相違なる 3 解を持つ条件からも求められるが、計算がやや煩雑になる。