2001 年京大理 $\boxed{3}$

$i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$ であるから、任意の整数 m に対し、$i^{m+4}=i^m i^4=i^m$ が成り立つ。
任意の整数 n に対し、$a_{n+k}=a_n$ が成り立つ条件は、$f(n+k)-f(n)$ が 4 の倍数であることである。

$$f(n+k)-f(n)=\frac{(n+k)(n+k-1)-n(n-1)}{2}=\frac{2kn+k(k-1)}{2}$$

任意の整数 n に対し、$2kn+k(k-1)$ が 8 の倍数であればよい。

$k=8p+q\ (p\geqq 0,\ 0\leqq q\leqq 7)$ とすると

$$2kn+k(k-1)=2(8p+q)n+(8p+q)(8p+q-1)=8(2pn+8p^2+2pq-p)+2qn+q(q-1)$$

$2kn+k(k-1)$ が 8 の倍数であるとき、$2qn+q(q-1)$ が 8 の倍数でなければならない。

任意の整数 n に対し、$2qn+q(q-1)$ が 8 の倍数かどうかを調べる。
$q=0$ のとき　$2qn+q(q-1)=0$ は 8 の倍数。
$q=1$ のとき　$2qn+q(q-1)=2n$ は、任意の n に対して 8 の倍数にはならない。
$q=2$ のとき　$2qn+q(q-1)=4n+2=2(2n+1)$ は、8 の倍数ではない。
$q=3$ のとき　$2qn+q(q-1)=6n+6=6(n+1)$ は、任意の n に対して 8 の倍数にはならない。
$q=4$ のとき　$2qn+q(q-1)=8n+12=4(2n+3)$ は、8 の倍数ではない。
$q=5$ のとき　$2qn+q(q-1)=10n+20=10(n+2)$ は、任意の n に対して 8 の倍数にはならない。
$q=6$ のとき　$2qn+q(q-1)=12n+30=6(2n+5)$ は、8 の倍数ではない。
$q=7$ のとき　$2qn+q(q-1)=14n+42=14(n+3)$ は、任意の n に対して 8 の倍数にはならない。

したがって、$q=0$ のときに限られる。
題意を満たす正の整数 k は　$\therefore k=8p\ (p\geqq 1)$　……（答）