2001年京大理 $\boxed{4}$

（解答 1）
正八面体の 6 つの頂点を、$P_1(0,\ 0,\ 1),\ P_2(1,\ 0,\ 0),\ P_3(0,\ 1,\ 0),\ P_4(-1,\ 0,\ 0),\ P_5(0,\ -1,\ 0),\ P_6(0,\ 0,\ -1)$ としても、一般性を失わない。これら 6 頂点の中のうち、相違なる 2 点を結ぶベクトルを考える。
一致するもの、符号が逆なものを除けば、下記ですべてである。

$$\overrightarrow{P_4P_2}=(2,\ 0,\ 0),\ \overrightarrow{P_5P_3}=(0,\ 2,\ 0),\ \overrightarrow{P_6P_1}=(0,\ 0,\ 2)$$

$$\overrightarrow{P_5P_2}=(1,\ 1,\ 0),\ \overrightarrow{P_3P_2}=(1,\ -1,\ 0),\ \overrightarrow{P_6P_3}=(0,\ 1,\ 1),\ \overrightarrow{P_1P_3}=(0,\ 1,\ -1),\ \overrightarrow{P_4P_1}=(1,\ 0,\ 1),\ \overrightarrow{P_2P_1}=(1,\ 0,\ -1)$$

$\vec{v}=(p,\ q,\ r)$ とする。$\vec{v}$ とこれらのベクトルの内積が、いずれも 0 ではないとすると

$$\overrightarrow{P_4P_2}\cdot\vec{v}=2p\neq 0,\ \overrightarrow{P_5P_3}\cdot\vec{v}=2q\neq 0,\ \overrightarrow{P_6P_1}\cdot\vec{v}=2r\neq 0$$

$$\overrightarrow{P_5P_2}\cdot\vec{v}=p+q\neq 0,\ \overrightarrow{P_3P_2}\cdot\vec{v}=p-q\neq 0,\ \overrightarrow{P_6P_3}\cdot\vec{v}=q+r\neq 0,\ \overrightarrow{P_1P_3}\cdot\vec{v}=q-r\neq 0,$$
$$\overrightarrow{P_4P_1}\cdot\vec{v}=p+r\neq 0,\ \overrightarrow{P_2P_1}\cdot\vec{v}=p-r\neq 0$$

これより、$\vec{v}$ の成分 $p,\ q,\ r$ は、いずれも 0 ではなく、なおかつ互いに絶対値が異なる。

原点 O を基準とした、6 頂点の位置ベクトルを考える。このとき、

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\vec{v}=r,\ \overrightarrow{OP_2}\cdot\vec{v}=p,\ \overrightarrow{OP_3}\cdot\vec{v}=q,\ \overrightarrow{OP_4}\cdot\vec{v}=-p,\ \overrightarrow{OP_5}\cdot\vec{v}=-q,\ \overrightarrow{OP_6}\cdot\vec{v}=-r$$

であり、これら 6 つの値はすべて異なる。すなわち、最小値がただ 1 つ存在する。

例えば、$\overrightarrow{OP_1}\cdot\vec{v}=r$ が最小であるとき、$k=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について、$\overrightarrow{P_kP_1}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\vec{v}-\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{v}<0$ が成立する。

以上により、題意は示された。（証明終）

（解答 2）
原点 O を基準とした、6 頂点の位置ベクトルを考える。このとき、$k\neq m$ であれば

$$\overrightarrow{P_kP_m}\cdot\vec{v}=(\overrightarrow{OP_m}-\overrightarrow{OP_k})\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OP_m}\cdot\vec{v}-\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{v}\neq 0 \quad \therefore \overrightarrow{OP_m}\cdot\vec{v}\neq\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{v}$$

これより、6 つの値 $\overrightarrow{OP_1}\cdot\vec{v},\ \overrightarrow{OP_2}\cdot\vec{v},\ \overrightarrow{OP_3}\cdot\vec{v},\ \overrightarrow{OP_4}\cdot\vec{v},\ \overrightarrow{OP_5}\cdot\vec{v},\ \overrightarrow{OP_6}\cdot\vec{v}$ は、すべて異なる。

すなわち、最小値がただ 1 つだけ存在する。

例えば、$\overrightarrow{OP_1}\cdot\vec{v}$ が最小であるとき、$k=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ について、$\overrightarrow{P_kP_1}\cdot\vec{v}=\overrightarrow{OP_1}\cdot\vec{v}-\overrightarrow{OP_k}\cdot\vec{v}<0$ が成立する。

以上により、題意は示された。（証明終）

※実は、座標を置く必要はまったくない。試験場で気づけた受験生がいただろうか？