2001年京大理 $\boxed{5}$

(1)

条件(イ)より、$z_k = e^{i\frac{2\pi m}{p}}$ $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ p-1)$ である。

$\alpha = e^{i\frac{2\pi}{p}}$ とすると、z_k は、$\alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{p-1}$ のいずれかである。

$z_k = \alpha^{t_k}$ $(1 \leqq t_k \leqq p-1,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ とすると、$z_1 z_2 \cdots z_n = \alpha^{t_1+t_2+\cdots+t_n} = 1$ より、指数の和 $t_1+t_2+\cdots+t_n$ が、p の倍数であることが条件である。

$p=2$ のとき　z_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ は、$\alpha=-1$ しかとれず、$z_1 z_2 z_3 = (-1)^3 = -1$ であるから　$a_3 = 0$

$p \geqq 3$ のとき　$3 \leqq t_1+t_2+t_3 \leqq 3p-3$

$3p-3-2p = p-3 \geqq 0$ であるから、$t_1+t_2+t_3 = p$ または $t_1+t_2+t_3 = 2p$ である必要がある。

$t_1+t_2+t_3 = p$ または $t_1+t_2+t_3 = 2p$ を満たす、$(t_1,\ t_2,\ t_3)$ の組の個数が、a_3 に等しい。

$t_1+t_2+t_3 = p$ のとき

$t_1 = 1$ のとき　$t_2+t_3 = p-1$　$(t_2,\ t_3)$ の組は、$(t_2,\ t_3) = (1,\ p-2),\ \cdots,\ (p-2,\ 1)$ の $p-2$ 組。

$t_1 = 2$ のとき　$t_2+t_3 = p-2$　$(t_2,\ t_3)$ の組は、$(t_2,\ t_3) = (1,\ p-3),\ \cdots,\ (p-3,\ 1)$ の $p-3$ 組。

　⋮

$t_1 = p-2$ のとき　$t_2+t_3 = 2$　$(t_2,\ t_3)$ の組は、$(t_2,\ t_3) = (1,\ 1)$ の1組。

$t_1+t_2+t_3 = p$ となる $(t_1,\ t_2,\ t_3)$ の組の個数は　$\therefore 1+2+\cdots+(p-2) = \dfrac{(p-2)(p-1)}{2}$

$t_1+t_2+t_3 = 2p$ のとき

$t_1 = 1$ とすると、$t_2+t_3 = 2p-1$ であるが、$t_2+t_3 \leqq 2p-2$ であるから、不適。

$t_1 = 2$ のとき　$t_2+t_3 = 2p-2$　$(t_2,\ t_3)$ の組は、$(t_2,\ t_3) = (p-1,\ p-1)$ の1組。

$t_1 = 3$ のとき　$t_2+t_3 = 2p-3$　$(t_2,\ t_3)$ の組は、$(t_2,\ t_3) = (p-1,\ p-2),\ (p-2,\ p-1)$ の2組。

　⋮

$t_1 = p-1$ のとき　$t_2+t_3 = p+1$　$(t_2,\ t_3)$ の組は、$(t_2,\ t_3) = (2,\ p-1),\ \cdots,\ (p-1,\ 2)$ の $p-2$ 組。

$t_1+t_2+t_3 = 2p$ となる $(t_1,\ t_2,\ t_3)$ の組の個数は　$\therefore 1+2+\cdots+(p-2) = \dfrac{(p-2)(p-1)}{2}$

以上により　$\therefore a_3 = (p-1)(p-2)$ ……(答)　　$p=2$ でも成立する。

(2)

$t_1+t_2+\cdots+t_{n+1}$ が p の倍数であるとき、$1 \leqq t_{n+2} \leqq p-1$ であるから、いかなる t_{n+2} についても、$t_1+t_2+\cdots+t_{n+1}+t_{n+2}$ は、必ず p の倍数ではない。

$t_1+t_2+\cdots+t_{n+1}$ が p の倍数ではないとき、$t_1+t_2+\cdots+t_{n+1}$ を p で割った余りが q $(1 \leqq q \leqq p-1)$ とすると、$t_{n+2} = p-q$ ととれば、$t_1+t_2+\cdots+t_{n+1}+t_{n+2}$ は p の倍数になる。すなわち、$t_1+t_2+\cdots+t_{n+1}+t_{n+2}$ が p の倍数となるような t_{n+2} が、ただ1つ存在する。

すべての $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_{n+1}$ の組は、$(p-1)^{n+1}$ 通りであるから　$\therefore a_{n+2} = (p-1)^{n+1} - a_{n+1}$ ……(答)

(3)

$n=2$ のとき、$2 \leqq t_1+t_2 \leqq 2p-2$ より、$t_1+t_2=p$ を満たす $(t_1,\ t_2)$ の個数が、a_2 に等しい。

このような組は $(t_1,\ t_2)=(1,\ p-1),\ \cdots,\ (p-1,\ 1)$ の $p-1$ 組であるから　$\therefore a_2=p-1$

(2) より、$a_{n+1}=(p-1)^n-a_n\ \ (n \geqq 2)$ である。両辺を $(p-1)^{n+1}$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{(p-1)^{n+1}}=-\frac{1}{p-1}\cdot\frac{a_n}{(p-1)^n}+\frac{1}{p-1} \qquad \frac{a_{n+1}}{(p-1)^{n+1}}-\frac{1}{p}=-\frac{1}{p-1}\left\{\frac{a_n}{(p-1)^n}-\frac{1}{p}\right\}$$

$$\frac{a_n}{(p-1)^n}-\frac{1}{p}=\left(-\frac{1}{p-1}\right)^{n-2}\left\{\frac{a_2}{(p-1)^2}-\frac{1}{p}\right\}=\left(-\frac{1}{p-1}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)=\left(-\frac{1}{p-1}\right)^{n-2}\frac{1}{p(p-1)}$$

$$=-\left(-\frac{1}{p-1}\right)^{n-1}\frac{1}{p}$$

$$\frac{a_n}{(p-1)^n}=\frac{1}{p}\left\{1-\left(-\frac{1}{p-1}\right)^{n-1}\right\}=\frac{1}{p}\left\{1+\frac{(-1)^n}{(p-1)^{n-1}}\right\} \qquad \therefore a_n=\frac{1}{p}\left\{(p-1)^n+(-1)^n(p-1)\right\} \ \cdots\cdots(\text{答})$$

(注)

(1) において、$t_1+t_2+t_3=p$ となる $(t_1,\ t_2,\ t_3)$ の組の個数は、場合の数の考え方でも求められる。

横一列に p 個のボールを並べ、$p-1$ 箇所あるボールとボールの間のうちいずれか 2 箇所に仕切りを置く。

3 グループに分けられたボールの個数を、左から $t_1,\ t_2,\ t_3$ とすれば、いずれも $p-1$ 以下であるから、

仕切りの置き方の総数が、$t_1+t_2+t_3=p$ となる $(t_1,\ t_2,\ t_3)$ の組の個数に等しい。　$\therefore {}_{p-1}C_2=\dfrac{(p-1)(p-2)}{2}$

しかし、$t_1+t_2+t_3=2p$ については、同じ考えが使えない。

また、a_3 は (2) の漸化式と $a_2=p-1$ からも求められる。

$$a_3=(p-1)^2-a_2=(p-1)^2-(p-1)=(p-1)(p-2)$$