2001年京大理 $\boxed{6}$

$t=nx$ とおくと　$x=\dfrac{t}{n}$　$dx=\dfrac{1}{n}dt$

$$\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|dx=\int_0^{n^2\pi} e^{-t/n}|\sin t|\cdot\frac{1}{n}dt=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-t/n}|\sin t|dt$$

区間 $(k-1)\pi \leqq t \leqq k\pi$ において、k が奇数ならば $\sin t \geqq 0$ 、k が偶数ならば $\sin t \leqq 0$ であるから

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-t/n}|\sin t|dt=(-1)^{k-1}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-t/n}\sin t dt$$

$I_k=\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-t/n}\sin t dt$ とすると

$$I_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-t/n}(-\cos t)'dt=\left[-e^{-t/n}\cos t\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}-\frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-t/n}\cos t dt$$

$$=(-1)^{k+1}e^{-k\pi/n}-(-1)^k e^{-(k-1)\pi/n}-\frac{1}{n}\left\{\left[e^{-t/n}\sin t\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}+\frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-t/n}\sin t dt\right\}$$

$$=-(-e^{-\pi/n})^k+(-e^{-\pi/n})^{k-1}-\frac{1}{n^2}I_k$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)I_k=(1+e^{-\pi/n})\cdot(-e^{-\pi/n})^{k-1}\qquad \therefore I_k=\frac{n^2}{n^2+1}(1+e^{-\pi/n})\cdot(-e^{-\pi/n})^{k-1}$$

$$\therefore \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-t/n}|\sin t|dt=\frac{n^2}{n^2+1}(1+e^{-\pi/n})\cdot(e^{-\pi/n})^{k-1}$$

これより

$$\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|dx=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-t/n}|\sin t|dt=\frac{n}{n^2+1}(1+e^{-\pi/n})\sum_{k=1}^{n^2}(e^{-\pi/n})^{k-1}$$

$$=\frac{n}{n^2+1}(1+e^{-\pi/n})\cdot\frac{1-(e^{-\pi/n})^{n^2}}{1-e^{-\pi/n}}=\frac{n^2}{n^2+1}\cdot(1+e^{-\pi/n})\cdot(1-e^{-n\pi})\cdot\frac{\frac{1}{n}}{1-e^{-\pi/n}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\cdot(e^{\pi/n}+1)\cdot(1-e^{-n\pi})\cdot\frac{1}{n(e^{\pi/n}-1)}$$

ここで、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(e^{\pi/n}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\pi/n}-1}{\frac{\pi}{n}}\cdot\pi=\pi$ であるから

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|dx=1\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}\quad\cdots\cdots(答)$$

※$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ を断りなく用いた。