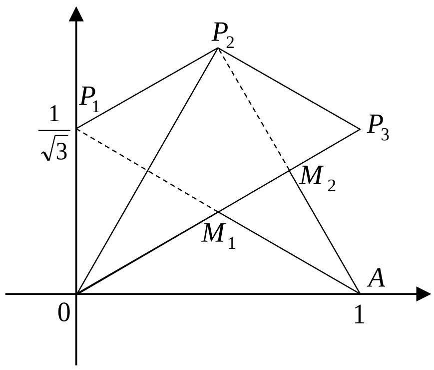
2002年京大後期文 $\boxed{4}$

$OP_n : OP_{n+1} = OM_n : OA,\ \angle P_nOP_{n+1} = \angle M_nOA$ である。

M_n を表す複素数は、$m_n = \dfrac{z_n + 1}{2}$ と表せるから、条件により



$$\frac{z_n}{z_{n+1}} = \frac{m_n}{1} = \frac{z_n + 1}{2} \qquad \frac{1}{z_{n+1}} = \frac{z_n + 1}{2z_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_n} + 1\right)$$

$$\frac{1}{z_{n+1}} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z_n} - 1\right) \qquad \frac{1}{z_n} - 1 = \left(\frac{1}{z_1} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (-1-\sqrt{3}i)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{z_n} = 1 + (-1-\sqrt{3}i)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} i$$

$$\frac{1}{|z_n|^2} = \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 1 = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{2}\right\}^2 + \frac{3}{4}$$

これより、$\dfrac{1}{|z_n|^2}$ は、$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} = \dfrac{1}{2}$ のとき、すなわち $n = 3$ のとき、最小値 $\dfrac{3}{4}$ をとる。

$\dfrac{1}{|z_n|}$ が最小のとき、$|z_n|$ は最大であるから、求める最大値は　$\therefore |z_3| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$　……(答)

(注)

図示すると $|z_n|$ の最大値は予想できるが、漸化式を解くのが簡明である。

点列 $P_1(z_1),\ P_2(z_2),\ P_3(z_3),\ \cdots,\ P_n(z_n),\ \cdots$ は、円 $|z - m_1| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 上の点であり、OP_3 はこの円の直径に等しい。

n を大きくすると、$P_n(z_n)$ は A に近づく。