2002年京大後期理$\boxed{4}$

$n=1$のとき
$f_1(x)=x+a_0$とし、ある有理数q_1に対して$f(q_1)=q_1+a_0$が有理数であるとき、a_0は有理数である。
したがって、$f_1(x)$のすべての係数は有理数であり、$n=1$のとき成立。

$n=k$のとき
$f_k(x)$をx^kの係数が1であるk次式としたとき、相違なるk個の有理数$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_k$に対し、
$f_k(q_1),\ f_k(q_2),\ \cdots,\ f_k(q_k)$がすべて有理数であれば、$f_k(x)$の係数はすべて有理数であると仮定する。

$n=k+1$のとき
$f_{k+1}(x)$をx^{k+1}の係数が1である$k+1$次式としたとき、相違なる$k+1$個の有理数$q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_k,\ q_{k+1}$に対し、
$f_{k+1}(q_1),\ f_{k+1}(q_2),\ \cdots,\ f_{k+1}(q_k),\ f_{k+1}(q_{k+1})$がすべて有理数であるとする。
$f_{k+1}(x)$を$x-q_{k+1}$で割ると、$f_{k+1}(x)=(x-q_{k+1})f_k(x)+r$と表せる。
ここで、$f_k(x)$は、x^kの係数が1であるk次式である。

$f_{k+1}(q_{k+1})=r$は有理数であるから、$1\leqq i\leqq k$において、$f_{k+1}(q_i)-r$は有理数である。
すなわち、$1\leqq i\leqq k$において、$(q_i-q_{k+1})f_k(q_i)$は有理数である。
$1\leqq i\leqq k$において、q_i-q_{k+1}は有理数同士の差であるから、有理数である。
結局、$1\leqq i\leqq k$において、$f_k(q_i)$は有理数である。
すると、帰納法の仮定により、$f_k(x)$の係数はすべて有理数である。
$q_{k+1},\ r$は有理数であり、$f_k(x)$の係数もすべて有理数であるから、$f_{k+1}(x)=(x-q_{k+1})f_k(x)+r$の係数は、
すべて有理数である。したがって、$n=k+1$でも成立。

以上により、示された。（証明終）