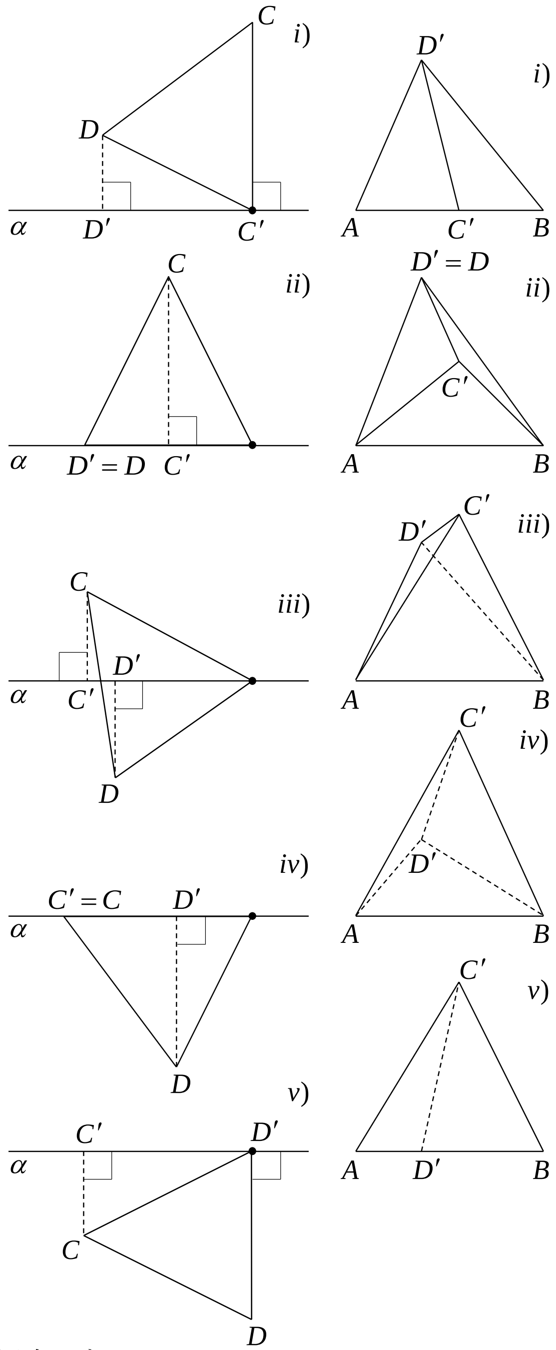
2002年京大後期理 $\boxed{3}$ 文 $\boxed{3}$ 共通

最初、四面体 $ABCD$ は、AB を含む平面 α と、面 ABC が、垂直になるように置かれているとする。
このとき、頂点 D は、α から見て頂点 C と同じ側にある。
AB を軸に、D が α に近づく方向に、四面体 $ABCD$ を回転させる操作を考える。

C', D' は、それぞれ AB と垂直な定直線上を動くが、AB と CD は垂直ではないから、C', D' は、異なる定直線上を動く。すなわち、C' と D' は異なる。



図の左側は、AB と垂直な平面への正射影であり、
図の右側は、α への正射影である。

初期状態 i)において、面 ABC は鋭角三角形であるから、
C' は AB 上にあり、A とも B とも一致しない。このとき、
$\angle AC'B=\pi,\ \angle AD'B<\pi$ であり、$\angle AC'B>\angle AD'B$ である。

回転を始めると、$\angle AC'B,\ \angle AD'B$ は減少する。
ii)のように、D が α 上に達すると、$D'=D$ となる。
このとき、$\angle AD'B$ は最小になる。

さらに回転し、iii)のように、D が α に関して C と反対側になると、$\angle AD'B$ は増加に転ずる。$\angle AC'B$ はさらに減少する。

iv)のように、C が α 上に達すると、$C'=C$ となる。
このとき、$\angle AC'B$ は最小になる。$\angle AD'B$ はさらに増加する。

さらに回転すると、$\angle AC'B$ も増加に転じ、$\angle AD'B$ も増加する。
やがて、v)のように、面 ABD が、α と垂直になる。
面 ABD は鋭角三角形であるから、D' は AB 上にあり、A とも B とも一致しない。このとき、$\angle AC'B<\pi,\ \angle AD'B=\pi$ であり、
$\angle AC'B<\angle AD'B$ である。

以上のように、i)の状態と v)の状態で、$\angle AC'B$ と $\angle AD'B$ の大小関係が変わっている。$\angle AC'B$ と $\angle AD'B$ は、ともに連続的に変化するから、途中で必ず $\angle AC'B=\angle AD'B$ となる。
このとき、円周角の定理により、C', D' は、AB を弦とする同一円上にある。

すなわち、4点 A, B, C', D' は、すべて相違なり、しかも同一円周上にあるから、題意は示された。
(証明終)