2002 年京大理 $\boxed{2}$

(1)

$AB^2+BC^2+CA^2>8$ より、$AB^2+CA^2>8-BC^2$ であるから

$$\cos\angle A=\frac{AB^2+CA^2-BC^2}{2AB\cdot CA}>\frac{(8-BC^2)-BC^2}{2AB\cdot CA}=\frac{4-BC^2}{AB\cdot CA}$$

3 点 A, B, C は半径 1 の円周上の点であるから　$0<BC\leqq 2$

$$\cos\angle A>\frac{4-BC^2}{AB\cdot CA}\geqq 0 \quad \therefore \cos\angle A>0$$

したがって、$\angle A$ は鋭角である。同様に、$\angle B, \angle C$ も鋭角であることが示されるから、

$\triangle ABC$ は鋭角三角形である。(証明終)

(2)

$\angle A=\alpha, \angle B=\beta, \angle C=\gamma$ とする。外接円の半径が 1 であるから、正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{CA}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\gamma}=2 \quad AB=2\sin\gamma,\ BC=2\sin\alpha,\ CA=2\sin\beta$$

$$AB^2+BC^2+CA^2=4(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)$$

$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ より、$\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ であり、$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$ であるから

$$AB^2+BC^2+CA^2=4\left\{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2(\alpha+\beta)\right\}$$

$\alpha+\beta=k\ (0<k<\pi)$ とすると

$$\begin{aligned}AB^2+BC^2+CA^2&=4\left\{\sin^2\alpha+\sin^2(k-\alpha)+\sin^2 k\right\}=2(1-\cos 2\alpha)+2\left\{1-\cos 2(k-\alpha)\right\}+4\sin^2 k\\&=4+4\sin^2 k-2\left\{\cos 2\alpha+\cos 2(k-\alpha)\right\}=4+4\sin^2 k-4\cos k\cos(k-2\alpha)\end{aligned}$$

$0<k<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\cos k>0$ 、$-k<k-2\alpha<k$ より $\cos k<\cos(k-2\alpha)\leqq 1$ であるから

$$AB^2+BC^2+CA^2<4+4\sin^2 k-4\cos^2 k=8\sin^2 k<8$$

$k=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$AB^2+BC^2+CA^2=4+4=8$

$\dfrac{\pi}{2}<k<\pi$ のとき　$\cos k<0$ であるから、$\cos(k-2\alpha)=1$、すなわち $\alpha=\dfrac{k}{2}$ のとき最大になる。

$$AB^2+BC^2+CA^2\leqq 4+4\sin^2 k-4\cos k=-4\cos^2 k-4\cos k+8=-4\left(\cos k+\frac{1}{2}\right)^2+9$$

$\cos k=-\dfrac{1}{2}$、$k=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき、最大値 9 をとる。このとき、$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ である。

以上により、$AB^2+BC^2+CA^2\leqq 9$ が示された。(証明終)

等号が成立するのは、$\triangle ABC$ が正三角形であるときである。