2002 年京大理 $\boxed{5}$

$f(x)=x^3+3ax^2+3bx$ とすると　$f'(x)=3x^2+6ax+3b=3(x^2+2ax+b)$

$f'(x)=0$ のとき　$x^2+2ax+b=0$　$D/4=a^2-b$

$a^2-b\leqq 0$ のとき、$D\leqq 0$ であり、$f'(x)\geqq 0$ であるから、$f(x)$ は単調増加。

このとき、$y=f(x)$ と $y=c$ のグラフは、交点を 1 つしか持たない。

$a^2-b>0$ のとき、$D>0$ であり、$f'(x)=0$ は相違なる 2 つの実数解を持つ。

これを $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると、$f(x)$ の増減は右の通り。

$y=f(x)$ のグラフは、極大値 $f(\alpha)$、極小値 $f(\beta)$ を持つから、

$f(\beta)<c<f(\alpha)$ であれば、$y=f(x)$ と $y=c$ のグラフは、相違なる 3 つの交点を持つ。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗		↘		↗

したがって、$a^2>b$ が示された。（証明終）

$d=a^2-b>0$ とする。

$f''(x)=6x+6a=6(x+a)$ より、$y=f(x)$ のグラフは $x=-a$ において変曲点を持つ。

$y=f(x)$ は、変曲点 $(-a,\ f(-a))$ に関して点対称である。$f(-a)=-a^3+3a^3-3ab=2a^3-3ab$

今、関数 $g(x)=f(x-a)-(2a^3-3ab)$ を考える。$y=g(x)$ のグラフは、$y=f(x)$ のグラフを、変曲点が原点になるように平行移動したものである。

$$\begin{aligned}g(x)&=(x-a)\left\{(x-a)^2+3a(x-a)+3b\right\}-(2a^3-3ab)=(x-a)(x^2+ax-2a^2+3b)-2a^3+3ab\\&=x^3+ax^2-(2a^2-3b)x-ax^2-a^2x+2a^3-3ab-2a^3+3ab=x^3-3(a^2-b)x\\&=x^3-3dx\end{aligned}$$

$$g'(x)=3x^2-3d=3(x+\sqrt{d})(x-\sqrt{d})$$

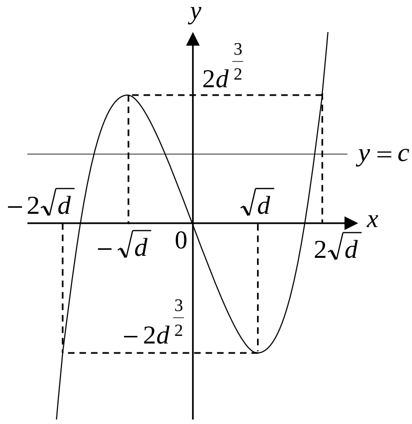
$g(x)$ の増減は右の通り。$g(-\sqrt{d})=2d^{\frac{3}{2}}$、$g(\sqrt{d})=-2d^{\frac{3}{2}}$ である。

x	$\cdots$	$-\sqrt{d}$	$\cdots$	$\sqrt{d}$	$\cdots$
$g'(x)$	＋	0	－	0	＋
$g(x)$	↗		↘		↗

$g(x)=2d^{\frac{3}{2}}$ のとき　$x^3-3dx-2d^{\frac{3}{2}}=0$　$(x+\sqrt{d})^2(x-2\sqrt{d})=0$

$g(x)=-2d^{\frac{3}{2}}$ のとき　$x^3-3dx+2d^{\frac{3}{2}}=0$　$(x-\sqrt{d})^2(x+2\sqrt{d})=0$

$y=g(x)$ のグラフは右図の通りで、$y=c$ のグラフと相違なる 3 つの交点を持つとき、それらの交点は、$-2\sqrt{d}<x<2\sqrt{d}$ に含まれる。



したがって、元の関数 $y=f(x)$ と、$y=c$ のグラフが相違なる 3 つの交点を持つとき、それらの交点は、$-a-2\sqrt{d}<x<-a+2\sqrt{d}$ に含まれる。

すなわち、開区間 $(-a-2\sqrt{a^2-b},\ -a+2\sqrt{a^2-b})$ に含まれる。（証明終）

（注）

$a^2-b>0$ の条件下で、 $f'(x)=0$ の相違なる 2 実数解を、 $\alpha=-a-\sqrt{a^2-b},\ \beta=-a+\sqrt{a^2-b}$ としたとき、

$x=\alpha$ 以外で $f(x)=f(\alpha)$ を満たす x 、 $x=\beta$ 以外で $f(x)=f(\beta)$ を満たす x を、それぞれ求めることになるが、次のように解と係数の関係を用いるのが、最も簡単である。

3 次方程式 $f(x)=f(\beta)$ は、2 重解 $x=\beta$ を持つので、残りの解を $x=x_1$ とすると、解と係数の関係より

$$2\beta+x_1=-3a \qquad \therefore x_1=-3a-2\beta=-3a-2(-a+\sqrt{a^2-b})=-a-2\sqrt{a^2-b}$$

同様に、 $f(x)=f(\alpha)$ は、2 重解 $x=\alpha$ を持つので、残りの解を $x=x_2$ とすると、解と係数の関係より

$$2\alpha+x_2=-3a \qquad \therefore x_2=-3a-2\alpha=-3a-2(-a-\sqrt{a^2-b})=-a+2\sqrt{a^2-b}$$

したがって、 $y=f(x)$ と $y=c$ のグラフが相違なる 3 つの交点を持つとき、それらの交点は、 $x_1<x<x_2$ に含まれる。なわち、開区間 $(-a-2\sqrt{a^2-b},\ -a+2\sqrt{a^2-b})$ に含まれる。