2002年京大理 $\boxed{6}$

$\theta°$ をラジアンに換算すると、$\dfrac{\pi}{180}\theta$ である。$\alpha = \dfrac{\pi}{180}\theta$ とする。

条件(ii)により、$z_{n+1} - z_n = e^{i\alpha}(z_n - z_{n-1})$ であるから　$\therefore z_{n+1} - e^{i\alpha} z_n = z_n - e^{i\alpha} z_{n-1}$
これより、$z_n - e^{i\alpha} z_{n-1}$ は一定であるから、条件(i)より　$\therefore z_n - e^{i\alpha} z_{n-1} = z_1 - e^{i\alpha} z_0 = a$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ であるから、$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha = 1$ になることはないので

$$z_n - \frac{a}{1-e^{i\alpha}} = e^{i\alpha}\left(z_{n-1} - \frac{a}{1-e^{i\alpha}}\right) \quad z_n - \frac{a}{1-e^{i\alpha}} = e^{in\alpha}\left(z_0 - \frac{a}{1-e^{i\alpha}}\right) = -e^{in\alpha} \cdot \frac{a}{1-e^{i\alpha}}$$

$$\therefore z_n = \frac{1-e^{in\alpha}}{1-e^{i\alpha}} a$$

$z_n = z_0 = 0$ であるとき、$e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i\sin n\alpha = 1$ であるから、m を整数として

$$n\alpha = \frac{n\pi\theta}{180} = 2m\pi \quad \therefore \theta = \frac{360m}{n}$$

したがって、θ は有理数である。

逆に、θ が有理数であるとき、$p,\ q$ を互いに素な自然数として、$\theta = \dfrac{q}{p}$ とすると

$\alpha = \dfrac{\pi}{180}\theta = \dfrac{q}{180p}\pi$ より、例えば $n = 360p$ とすれば、$n\alpha = 2q\pi$ となり、$e^{in\alpha} = 1$ となる。
すなわち、$z_n = 0$ となる n が存在する。

以上により、z_n が z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は、θ が有理数であることである。
(証明終)