2002年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$共通

$f(x)=0$ の整数解は、1か-1に限られる。

i）$f(x)=0$ が重解 $x=1$ を持つとき

$f(1)=1+a+b+c+1=0 \quad \therefore c=-(a+b+2)$

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2-(a+b+2)x+1=(x-1)\left\{x^3+(a+1)x^2+(a+b+1)x-1\right\}=0$

さらに、$x^3+(a+1)x^2+(a+b+1)x-1=0$ が $x=1$ を解に持つので

$1+(a+1)+(a+b+1)-1=2a+b+2=0 \quad \therefore b=-(2a+2)$

$f(x)=(x-1)\left\{x^3+(a+1)x^2-(a+1)x-1\right\}=(x-1)^2\left\{x^2+(a+2)x+1\right\}=0$

$x^2+(a+2)x+1=0$ が虚数解を持つので

$D=(a+2)^2-4<0 \quad (a+2)^2=0,\ 1 \quad \therefore a=-3,\ -2,\ -1 \quad \therefore (a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-1,\ 0,\ -1)$

ii）$f(x)=0$ が重解 $x=-1$ を持つとき

$f(1)=1-a+b-c+1=0 \quad \therefore c=-(a-b-2)$

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2-(a-b-2)x+1=(x+1)\left\{x^3+(a-1)x^2-(a-b-1)x+1\right\}=0$

さらに、$x^3+(a-1)x^2-(a-b-1)x+1=0$ が $x=-1$ を解に持つので

$-1+(a-1)+(a-b-1)+1=2a-b-2=0 \quad \therefore b=2a-2$

$f(x)=(x+1)\left\{x^3+(a-1)x^2+(a-1)x+1\right\}=(x+1)^2\left\{x^2+(a-2)x+1\right\}=0$

$x^2+(a-2)x+1=0$ が虚数解を持つので

$D=(a-2)^2-4<0 \quad (a-2)^2=0,\ 1 \quad \therefore a=1,\ 2,\ 3 \quad \therefore (a,\ b,\ c)=(1,\ 0,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 4,\ 3)$

iii）$f(x)=0$ が $x=1,\ -1$ を解に持つとき

$f(1)=a+b+c+2=0 \quad f(-1)=-a+b-c+2=0 \quad \therefore b=-2,\ c=-a$

$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1=(x^2-1)(x^2+ax-1)=0$

$x^2+ax-1=0$ は、$D=a^2+4>0$ より、虚数解を持たない。

以上により　$\therefore (a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-1,\ 0,\ -1),\ (1,\ 0,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2),\ (3,\ 4,\ 3)$ ……（答）