2003年京大後期文$\boxed{1}$

(i)が成り立つとき

$p>0,\ q>0,\ p+q<1$である実数$p,\ q$を用いて、$\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$と書ける。このとき、

$$\overrightarrow{AP}=p(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})+q(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}) \qquad \therefore (1-p-q)\overrightarrow{PA}+p\overrightarrow{PB}+q\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

$1-p-q>0,\ p>0,\ q>0$であるから、(ii)が成り立つ。

(ii)が成り立つとき

正の数$a,\ b,\ c$があって、$a\overrightarrow{PA}+b\overrightarrow{PB}+c\overrightarrow{PC}=\vec{0}$と書ける。このとき

$$-a\overrightarrow{AP}+b(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+c(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0} \qquad (a+b+c)\overrightarrow{AP}=b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$$

$\dfrac{b}{a+b+c}>0,\ \dfrac{c}{a+b+c}>0,\ \dfrac{b}{a+b+c}+\dfrac{c}{a+b+c}=\dfrac{b+c}{a+b+c}<1$であるから、(i)が成り立つ。

以上により、条件(i)と(ii)は、同値である。(証明終)