2003 年京大文 $\boxed{4}$

x^2 を $2p$ で割った余りと、y^2 を $2p$ で割った余りが等しいとき、
$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ は $2p$ で割り切れる。すなわち、$(x-y)(x+y)$ は偶数である。
x と y の奇偶が異なるとき、$x-y$ と $x+y$ はともに奇数であるから、$(x-y)(x+y)$ は奇数であり、不適。
したがって、x と y の奇偶は一致し、$x-y$ と $x+y$ はともに偶数である。

少なくとも、$x+y$ と $x-y$ のうち一方は、p で割り切れなければならない。
p は 3 以上の素数であり、奇数であるから

$x+y$ が p で割り切れるとき
$0 \leqq x \leqq p,\ 0 \leqq y \leqq p$ より、$0 \leqq x+y \leqq 2p$ であるから、$x+y=0$ または $x+y=2p$ しかあり得ない。
すなわち、$x=y=0$ または $x=y=p$ の場合に限られるから、$x=y$ である。
上記以外のとき、$x-y$ が p で割り切れなければならない。
$-p \leqq x-y \leqq p$ であるから、$x-y=0$ しかあり得ない。すなわち、$x=y$ である。

以上により、x^2 を $2p$ で割った余りと、y^2 を $2p$ で割った余りが等しいとき、$x=y$ である。(証明終)