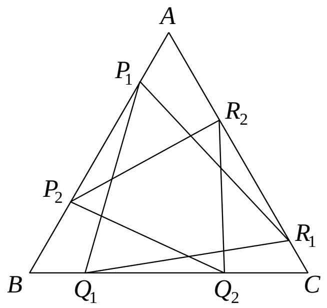
2003 年京大後期理 $\boxed{1}$



いずれも1より小さい正の数 p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2 を考える。

$$\overrightarrow{AP_1}=p_1\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AP_2}=p_2\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AR_1}=r_1\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AR_2}=r_2\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AQ_1}=(1-q_1)\overrightarrow{AB}+q_1\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AQ_2}=(1-q_2)\overrightarrow{AB}+q_2\overrightarrow{AC}$$

とおく。

$$\overrightarrow{P_1Q_1}=\overrightarrow{AQ_1}-\overrightarrow{AP_1}=(1-q_1-p_1)\overrightarrow{AB}+q_1\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{P_1R_1}=\overrightarrow{AR_1}-\overrightarrow{AP_1}=r_1\overrightarrow{AC}-p_1\overrightarrow{AB}$$

$\triangle P_1Q_1R_1$ の重心を G_1 とすると

$$\overrightarrow{P_1G_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1Q_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{P_1R_1}=\frac{1}{3}(1-q_1-p_1)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}q_1\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}r_1\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}p_1\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(1-q_1-2p_1)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(q_1+r_1)\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{P_1G_1}-\overrightarrow{P_1A}=\frac{1}{3}(1-q_1-2p_1)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(q_1+r_1)\overrightarrow{AC}+p_1\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}(1-q_1+p_1)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(q_1+r_1)\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \overrightarrow{AG_1}=\frac{1}{3}(1-q_1+p_1)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(q_1+r_1)\overrightarrow{AC} \quad \text{——①}$$

$\triangle P_2Q_2R_2$ の重心を G_2 とすると、同様に

$$\therefore \overrightarrow{AG_2}=\frac{1}{3}(1-q_2+p_2)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(q_2+r_2)\overrightarrow{AC} \quad \text{——②}$$

G_1 と G_2 が一致するとき、①と②を比較すると

$1-q_1+p_1=1-q_2+p_2$ より　$\therefore p_1-p_2=q_1-q_2$　　$q_1+r_1=q_2+r_2$ より　$\therefore q_1-q_2=r_2-r_1$

したがって　$\therefore |p_1-p_2|=|q_1-q_2|=|r_1-r_2|$

$P_1P_2=|p_1-p_2|AB,\ Q_1Q_2=|q_1-q_2|BC,\ R_1R_2=|r_1-r_2|CA$ であり、$AB=BC=CA$ であるから

$\therefore P_1P_2=Q_1Q_2=R_1R_2$　（証明終）