2003年京大後期理 $\boxed{3}$

解と係数の関係より

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-a$ ——① $\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1+\alpha_1\alpha_2=b$ ——② $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-1$ ——③

3次方程式 $f(x)=0$ は、少なくとも1つの実数解を持つので、これを p とする。
複素数平面上で、$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ は正三角形をなすので、3つの解がすべて実数解ということはない。
$f(x)$ が実数係数であることから、p 以外の2解は共役な複素数であり、$q\pm ri$ とおける。

$\alpha_1=p,\ \alpha_2=q+ri,\ \alpha_3=q-ri$ とすると

$|\alpha_2-\alpha_3|=2|r|=\sqrt{3}$ 対称性から $r>0$ とすれば $\therefore r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$|\alpha_1-\alpha_2|^2=|\alpha_1-\alpha_3|^2=(p-q)^2+\dfrac{3}{4}=3$ $(p-q)^2=\dfrac{9}{4}$ $p-q=\pm\dfrac{3}{2}$ $\therefore p=q\pm\dfrac{3}{2}$

$p=q-\dfrac{3}{2}$ のとき ③より

$\left(q-\dfrac{3}{2}\right)\left(q^2+\dfrac{3}{4}\right)=-1$ $q^3-\dfrac{3}{2}q^2+\dfrac{3}{4}q-\dfrac{1}{8}=0$ $\left(q-\dfrac{1}{2}\right)^3=0$ $\therefore q=\dfrac{1}{2},\ p=-1$

$\alpha_1=-1,\ \alpha_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \alpha_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ であるから、①、②より $\therefore a=0,\ b=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=0$

$p=q+\dfrac{3}{2}$ のとき ③、①より

$\left(q+\dfrac{3}{2}\right)\left(q^2+\dfrac{3}{4}\right)=-1$ $a=-q-\dfrac{3}{2}-q-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i-q+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=-3q-\dfrac{3}{2}$ $q=-\dfrac{1}{3}a-\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$\left(-\dfrac{1}{3}a+1\right)\left(\dfrac{1}{9}a^2+\dfrac{1}{3}a+1\right)=-\dfrac{1}{27}a^3+1=-1$ $a^3=2\cdot 3^3$ $\therefore a=3\sqrt[3]{2}$ $\therefore q=-\dfrac{1}{2}-\sqrt[3]{2},\ p=1-\sqrt[3]{2}$

$\alpha_1=1-\sqrt[3]{2},\ \alpha_2=-\dfrac{1}{2}-\sqrt[3]{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ \alpha_3=-\dfrac{1}{2}-\sqrt[3]{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ であるから、②より

$\therefore b=(1-\sqrt[3]{2})(-1-2\sqrt[3]{2})+\left(\dfrac{1}{2}+\sqrt[3]{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}=3\sqrt[3]{4}$

以上により $\therefore (a,\ b)=(0,\ 0),\ (3\sqrt[3]{2},\ 3\sqrt[3]{4})$ ……(答)