2003年京大理$\boxed{3}$文$\boxed{3}$（ほぼ）共通

$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \therefore \vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad \therefore \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0 \quad \therefore \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$

これより　$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$ ――①

また、$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCA$ の面積を $S_1,\ S_2,\ S_3$ とすると

$$S_1=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \quad S_2=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{b}\right|^2\left|\vec{c}\right|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2} \quad S_3=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{c}\right|^2\left|\vec{a}\right|^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2}$$

$S_1=S_2=S_3$ および①より

$$4({S_2}^2-{S_1}^2)=\left|\vec{b}\right|^2\left(\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2\right)=0 \quad 4({S_3}^2-{S_2}^2)=\left|\vec{c}\right|^2\left(\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2\right)=0 \quad 4({S_1}^2-{S_3}^2)=\left|\vec{a}\right|^2\left(\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{c}\right|^2\right)=0$$

$$\left|\vec{a}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2 \quad \therefore \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$$

したがって $OA=OB=OC$ であり、①から $\angle AOB=\angle BOC=\angle COA$ であるから、
$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCA$ は合同な二等辺三角形である。
これより、$AB=BC=CA$ がわかり、$\triangle ABC$ は正三角形である。

$OA=OB=OC=x,\ \ \angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\theta\ (0<\theta<\pi)$ とすると、$AB=BC=CA=2x\sin\dfrac{\theta}{2}$

$\triangle ABC$ の面積 S_4 は　$S_4=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4x^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{3}x^2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

これが $S_1=S_2=S_3=\dfrac{1}{2}x^2\sin\theta=x^2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ に等しいので、$\sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0,\ x\neq 0$ より

$$\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}=\cos\frac{\theta}{2} \quad \tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{6} \quad \therefore \theta=\frac{\pi}{3}$$

したがって $AB=BC=CA=x$ であり、4つの面がすべて正三角形であることが示された。

以上により、この四面体は正四面体である。（証明終）

※文系の問題文は、ベクトルを用いなさいと教えてくれており、理系より親切である。