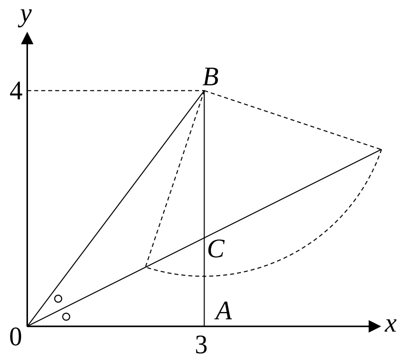
2004年京大文 $\boxed{3}$



$\angle OAB$は直角であり、$AB=4$である。
座標平面上で、$O(0,\ 0),\ A(3,\ 0),\ B(3,\ 4)$としても、一般性を失わない。
$\angle AOB$の二等分線と、ABの交点をCとすると

$AC:CB=3:5$であるから　$\therefore AC=4\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{2}$

$\angle AOB$の二等分線は、直線$y=\dfrac{1}{2}x$である。$\angle AOB$の二等分線上の点を、

$P(2t,\ t)\ (t>0)$とおく。点BとPの距離が、$\sqrt{10}$であるから

$$(2t-3)^2+(t-4)^2=4t^2-12t+9+t^2-8t+16=5t^2-20t+25=10$$
$$5t^2-20t+15=0 \qquad t^2-4t+3=(t-1)(t-3)=0 \qquad \therefore t=1,\ 3$$

題意を満たす点Pは、$(2,\ 1)$および$(6,\ 3)$である。

$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}=(3s+3t,\ 4t)$とすると

$P(2,\ 1)$のとき　$3s+3t=2,\ 4t=1$　$\therefore s=\dfrac{5}{12},\ t=\dfrac{1}{4}$　$P(6,\ 3)$のとき　$3s+3t=6,\ 4t=3$　$\therefore s=\dfrac{5}{4},\ t=\dfrac{3}{4}$

求める位置ベクトルは　$\therefore \overrightarrow{OP}=\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b},\ \dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$　……（答）