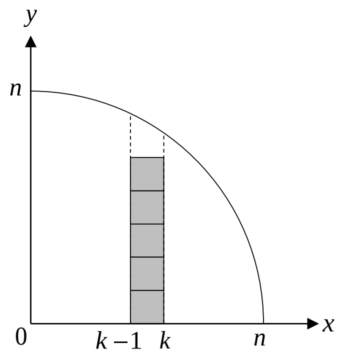
2004年京大後期理$\boxed{6}$

対称性から、C_n の第1象限にある部分について考える。
C_n に含まれる題意の正方形のうち、第1象限の $k-1 \leqq x \leqq k$ $(1 \leqq k \leqq n)$ の部分に含まれる個数は、

ガウス記号を用いて $\left[\sqrt{n^2-k^2}\right]$ で与えられる。



$\sqrt{n^2-k^2}-1 < \left[\sqrt{n^2-k^2}\right] \leqq \sqrt{n^2-k^2}$ であるから、

各辺の $k=1$ から $k=n$ までの和をとると

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{n^2-k^2}-1\right) < \sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{n^2-k^2}\right] \leqq \sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}-n < \sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{n^2-k^2}\right] \leqq \sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}$$

$N(n)=4\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{n^2-k^2}\right]$ より

$$4\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}-4n < N(n) \leqq 4\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2} \qquad 4\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}-\frac{4}{n} < \frac{N(n)}{n^2} \leqq 4\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

区分求積法およびはさみうちの原理により

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n^2} = 4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} = 4\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$ は、半径1の円の面積の $\frac{1}{4}$ に等しいから　$\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n^2} = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi$$　（証明終）