2004年京大理 $\boxed{2}$

$x>0$ で、$f(x)=\left(\dfrac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\dfrac{\log x}{x}\geqq 0$ となる範囲を考える。

$e-x^{\alpha}\geqq 0$ かつ $\log x\geqq 0$ のとき　$x^{\alpha}\leqq e,\ x\geqq 1$　$\therefore 1\leqq x\leqq e^{\frac{1}{\alpha}}$

$e-x^{\alpha}\leqq 0$ かつ $\log x\leqq 0$ のとき　$x\geqq e^{\frac{1}{\alpha}}>1$ と $0<x\leqq 1$ に共通範囲は存在しない。

求める面積は　$S=\displaystyle\int_1^{e^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\frac{\log x}{x}dx$

$t=\log x$ とおくと　$dt=\dfrac{dx}{x}$　$x=e^t$

x	$1\to e^{\frac{1}{\alpha}}$
t	$0\to\dfrac{1}{\alpha}$

$$S=\int_0^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{e}{e^{t\alpha}}-1\right)tdt=e\int_0^{\frac{1}{\alpha}}te^{-\alpha t}dt-\int_0^{\frac{1}{\alpha}}tdt=e\left\{\left[t\left(-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right)\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{1}{\alpha}}e^{-\alpha t}dt\right\}-\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=e\left(-\frac{1}{\alpha^2}e^{-1}+\frac{1}{\alpha}\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}\right)-\frac{1}{2\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{e-1}{\alpha^2}-\frac{1}{2\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2}\left(e-\frac{5}{2}\right)\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

※ $f(x)$ の増減を調べる必要はない。