2004年京大理 $\boxed{3}$

$x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}=\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\left(x-\dfrac{n-1}{n}\right)$ であるから

$x^{2n}=P_n(x)\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\left(x-\dfrac{n-1}{n}\right)+a_nx+b_n$ より、両辺に $x=\dfrac{1}{n},\ \dfrac{n-1}{n}$ を代入すると

$\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2n}=\dfrac{1}{n}a_n+b_n$ ——① $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{2n}=\dfrac{n-1}{n}a_n+b_n$ ——②

②−①より $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{2n}-\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2n}=\dfrac{n-2}{n}a_n$ $n\to\infty$ について考えるので

$$\therefore a_n=\frac{n}{n-2}\left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}-\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}\right\}$$

$$\therefore b_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}-\frac{1}{n}a_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}-\frac{1}{n-2}\left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}-\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}\right\}=\frac{n-1}{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}-\frac{1}{n-2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}$$

ここで、$n\to\infty$ のとき、$\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2n}\to 0,\ \dfrac{1}{n-2}\to 0,\ \dfrac{n}{n-2}=\dfrac{1}{1-\frac{2}{n}}\to 1,\ \dfrac{n-1}{n-2}=\dfrac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{2}{n}}\to 1$ は明らかである。

$\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n}=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}}$ より $\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$

したがって $\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{e^2},\ \lim_{n\to\infty}b_n=0$ ……(答)