2004年京大理$\boxed{5}$

円Cの中心は、2点$1,\ -1$の垂直二等分線上にあるから、虚数軸上にある。
qを実数として、円Cの中心をqiとおく。

このとき、$|1-qi|=|\alpha-qi|$より　$|1-qi|^2=|\alpha-qi|^2$　$|1-qi|^2=1+q^2$であるから

$$|\alpha-qi|^2=(\alpha-qi)\overline{(\alpha-qi)}=(\alpha-qi)(\overline{\alpha}+qi)=\alpha\overline{\alpha}+\alpha qi-\overline{\alpha}qi+q^2=|\alpha|^2+q^2+q(\alpha-\overline{\alpha})i=1+q^2$$

$$\therefore q(\alpha-\overline{\alpha})i=1-|\alpha|^2$$

αは実数ではなく、$\alpha-\overline{\alpha}\neq 0$であるから　$\therefore q=\dfrac{1-|\alpha|^2}{(\alpha-\overline{\alpha})i}$ ――①

$$\left|-\frac{1}{\overline{\alpha}}-qi\right|^2=\left|\frac{1}{\overline{\alpha}}+qi\right|^2=\left(\frac{1}{\overline{\alpha}}+qi\right)\overline{\left(\frac{1}{\overline{\alpha}}+qi\right)}=\left(\frac{1}{\overline{\alpha}}+qi\right)\left(\frac{1}{\alpha}-qi\right)=\frac{1}{\alpha\overline{\alpha}}+\frac{qi}{\alpha}-\frac{qi}{\overline{\alpha}}+q^2=\frac{1}{|\alpha|^2}+\frac{q(\overline{\alpha}-\alpha)i}{|\alpha|^2}+q^2$$

①より　$\therefore\left|-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}-qi\right|^2=\dfrac{1}{|\alpha|^2}+\dfrac{|\alpha|^2-1}{|\alpha|^2}+q^2=1+q^2$

したがって、Cは$-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$も通ることが示された。（証明終）