2004年京大理 $\boxed{6}$

番号 N の箱まで操作を終えたとき、番号 $N+1$ の箱に赤玉が入っているとする。
このとき、赤玉は、最後の操作で必ず番号 $N+1$ 以外の箱に移る。
したがって、番号 N の箱まで操作を終えたとき、赤玉は番号 $N+1$ 以外の箱に入っていなければならない。

$N=1$ のとき
最初の操作で、赤玉は必ず番号1の箱に移り、次の操作で赤玉は必ず番号2の箱に戻るから、確率は1。
$N \geqq 2$ のとき
番号 k $(1 \leqq k \leqq N)$ の箱に対する操作で、初めて赤玉が番号 $N+1$ の箱から移ったとする。
以後、番号 N の箱に対する操作まで、赤玉が番号 $N+1$ の箱に移ることはない。
最後の操作で、赤玉は確率 $\dfrac{1}{N}$ で番号 $N+1$ の箱に戻る。

求める確率は $\displaystyle \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N}=\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}=\frac{1}{N^2}\cdot\frac{1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^N}{1-\frac{N-1}{N}}=\frac{1}{N}\left\{1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right\}$

これは $N=1$ でも成立するので $\displaystyle \therefore \frac{1}{N}\left\{1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right\}$ ……(答)

※番号 N の箱まで操作を終えて、番号 $N+1$ の箱に赤玉が入っている確率は $\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N$ であるから、
　余事象を利用した解答でも可。