2005 年京大文 $\boxed{5}$

等差数列をなす 3 つの自然数を $x,\ y,\ z\,(x<y<z)$ とすると、交差は $d=\dfrac{z-x}{2}$ であり、$z-x$ は偶数である。

$1\leqq x<z\leqq n$ より

n が奇数のとき　$1\leqq d\leqq\dfrac{n-1}{2}$

$d=1$ となる組は　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 4),\ \cdots,\ (n-2,\ n-1,\ n)$　$n-2$ 組

$d=2$ となる組は　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 3,\ 5),\ (2,\ 4,\ 6),\ \cdots,\ (n-4,\ n-2,\ n)$　$n-4$ 組

$\vdots$

$d=k$ となる組は　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1+k,\ 1+2k),\ (2,\ 2+k,\ 2+2k),\ \cdots,\ (n-2k,\ n-k,\ n)$　$n-2k$ 組

$\vdots$

$d=\dfrac{n-1}{2}$ となる組は　$(x,\ y,\ z)=\left(1,\ \dfrac{n+1}{2},\ n\right)$　1組

等差数列をなすすべての $(x,\ y,\ z)$ の組の個数は

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k)=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n+1)(n-1)}{4}=\frac{n-1}{4}\left\{2n-(n+1)\right\}=\frac{(n-1)^2}{4}$$

n が偶数のとき　$1\leqq d\leqq\dfrac{n-2}{2}$

同様に

$d=k$ となる組は　$(x,\ y,\ z)=(1,\ 1+k,\ 1+2k),\ (2,\ 2+k,\ 2+2k),\ \cdots,\ (n-2k,\ n-k,\ n)$　$n-2k$ 組

$\vdots$

$d=\dfrac{n-2}{2}$ となる組は　$(x,\ y,\ z)=\left(1,\ \dfrac{n}{2},\ n-1\right),\left(2,\ \dfrac{n+2}{2},\ n\right)$　2 組

等差数列をなすすべての $(x,\ y,\ z)$ の組の個数は

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(n-2k)=\frac{n(n-2)}{2}-\frac{n-2}{2}\left(\frac{n-2}{2}+1\right)=\frac{n(n-2)}{2}-\frac{n(n-2)}{4}=\frac{n(n-2)}{4}$$

3 数の取り出し方の総数は、${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ であるから、求める確率は

n が奇数のとき $\dfrac{3(n-1)}{2n(n-2)}$、n が偶数のとき $\dfrac{3}{2(n-1)}$　……(答)