

2005 年京大後期理 1

$C$  上の点  $P(t, t^3)$  ( $t > 0$ ) における接線は  $y = 3t^2(x - t) + t^3 = 3t^2x - 2t^3 = 3t^2\left(x - \frac{2}{3}t\right)$

$C$  上の点  $P$  における法線は  $y = -\frac{1}{3t^2}(x - t) + t^3 = -\frac{1}{3t^2}x + t^3 + \frac{1}{3t}$

これより、 $Q\left(\frac{2}{3}t, 0\right)$ ,  $R\left(0, t^3 + \frac{1}{3t}\right)$  であるから  $\frac{OR}{OQ} = \frac{3}{2t}\left(t^3 + \frac{1}{3t}\right) = \frac{1}{2}\left(3t^2 + \frac{1}{t^2}\right)$

相加平均・相乗平均の関係より  $\frac{OR}{OQ} \geq \sqrt{3t^2 \cdot \frac{1}{t^2}} = \sqrt{3}$

等号成立は  $3t^2 = \frac{1}{t^2}$   $t^4 = \frac{1}{3}$   $t = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$  のとき。

求める最小値は  $\therefore \sqrt{3}$  ……(答)