2005 年京大理 $\boxed{5}$

$\cos x=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ とすると　$(1+x^2)\cos x=1-x^2$　$(1+\cos x)x^2=1-\cos x$

$x=(2k+1)\pi$ は解ではないから、$1+\cos x\neq 0$ であり、　$x^2=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\tan^2\dfrac{x}{2}$

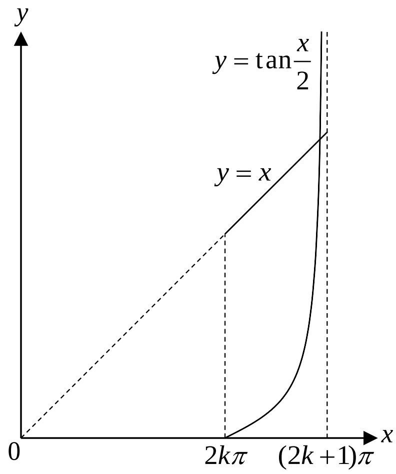
$2k\pi\leqq x<(2k+1)\pi$ のとき、$k\pi\leqq\dfrac{x}{2}<\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ であり、この範囲で $\tan\dfrac{x}{2}\geqq 0$ であるから　$\therefore x=\tan\dfrac{x}{2}$

(1)

$2k\pi\leqq x<(2k+1)\pi$ の範囲で、C_1 と C_2 が共有点を持つとき、

$2k\pi\leqq x<(2k+1)\pi$ の範囲で、$y=x$ と $y=\tan\dfrac{x}{2}$ が共有点を持つ。

グラフの概形は右図の通りであるから、C_1 と C_2 は共有点を持つ。



C_1 と C_2 の共有点の x 座標を α とすると、その点における C_1 の接線は

$$y=-(\sin\alpha)(x-\alpha)+\cos\alpha=-(\sin\alpha)x+\alpha\sin\alpha+\cos\alpha$$

$\alpha=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\alpha\sin\alpha+\cos\alpha&=\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\\&=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1\end{aligned}$$

したがって、接線の式は $y=-(\sin\alpha)x+1$ となり、$(0, 1)$ を通る。（証明終）

(2)

(1) のグラフの概形から、C_1 と C_2 の共有点は、ただ 1 つである。（証明終）

(注)

出題者の意図とは異なる解答である。

(1) は色々な示し方があるが、(2) は、$(0, 1)$ から C_1 に引ける接線が 1 本であることを示すのが、出題者の意図と考えられる。