2006年京大文$\boxed{2}$

3点$A,\ B,\ C$を通る平面を、αとする。

$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$ より　$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\cdot 2-1\cdot 0\\-1\cdot 2+1\cdot 2\\-1\cdot 0-1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$

平面αと垂直なベクトルの1つは、$\vec{k}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$とおけるから、平面$\alpha$の方程式は

$1\cdot(x-1)+1\cdot(z-1)=0\quad\therefore x+z=2$

点Eの座標を$(p,\ q,\ r)$とすると、$\overrightarrow{DE}$ は$\vec{k}$ の定数倍であり、$\overrightarrow{DE}=\begin{pmatrix}p-1\\q-3\\r-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\0\\k\end{pmatrix}$と表せるから

$p-1=r-7=k$ より　$\therefore r=p+6$　$q-3=0$ より　$\therefore q=3$

点Eの座標は$(p,\ 3,\ p+6)$と表せる。このとき、DEの中点$\left(\dfrac{p+1}{2},\ 3,\ \dfrac{p+13}{2}\right)$は、平面$\alpha$上の点であるから

$\dfrac{p+1}{2}+\dfrac{p+13}{2}=p+7=2\quad\therefore p=-5$

点Eの座標は　$(-5,\ 3,\ 1)$　……(答)