2006 年京大後期理$\boxed{1}$文$\boxed{3}$共通

$A(x)=Ax+a,\ B(x)=Bx+b,\ C(x)=Cx+c$ とすると

$\{A(x)\}^2+\{B(x)\}^2=(A^2+B^2)x^2+2(Aa+Bb)x+a^2+b^2$

$\{C(x)\}^2=C^2x^2+2Ccx+c^2$

$\{A(x)\}^2+\{B(x)\}^2=\{C(x)\}^2$ が成り立つとき

$A^2+B^2=C^2$ ——① $Aa+Bb=Cc$ ——② $a^2+b^2=c^2$ ——③

①より $A=C\cos\alpha,\ B=C\sin\alpha$ とおけて、③より $a=c\cos\beta,\ b=c\sin\beta$ とおける。②に代入すると

$Aa+Bb=Cc\cos\alpha\cos\beta+Cc\sin\alpha\sin\beta=Cc\cos(\beta-\alpha)=Cc$

$Cc\{\cos(\alpha-\beta)-1\}=0$

ここで、$A(x),\ B(x),\ C(x)$ は一次式であるから、$A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$ であり、$\cos\alpha\neq 0,\ \sin\alpha\neq 0$ である。

$c=0$ のとき　$a=b=0$

$A(x)=Cx\cos\alpha=C(x)\cos\alpha,\ B(x)=Cx\sin\alpha=C(x)\sin\alpha$ であり、ともに $C(x)$ の定数倍である。

$c\neq 0$ のとき　$\cos(\beta-\alpha)=1$　$\beta-\alpha=2n\pi$　$\beta=\alpha+2n\pi$

これより、$\cos\beta=\cos(\alpha+2n\pi)=\cos\alpha,\ \sin\beta=\sin(\alpha+2n\pi)=\sin\alpha$ であるから、

$A(x)=(Cx+c)\cos\alpha=C(x)\cos\alpha,\ B(x)=(Cx+c)\sin\alpha=C(x)\sin\alpha$ であり、ともに $C(x)$ の定数倍である。

以上により示された。（証明終）