2006 年京大後期理 $\boxed{4}$

$\angle A=\alpha,\ \angle B=\beta,\ \angle C=\gamma\ (\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\ \alpha+\beta+\gamma=\pi)$ とすると、正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{CA}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\gamma}=2\cdot 1 \quad \therefore BC=2\sin\alpha,\ CA=2\sin\beta,\ AB=2\sin\gamma$$

△ABC の内接円の半径を r とすると、△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}r(BC+CA+AB)=r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)$$

一方、$S=\frac{1}{2}\cdot CA\cdot AB\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ と書けるから

$$r(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

（解答 1）

$$\frac{1}{r}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\gamma\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}+\frac{1}{\sin\beta\sin\gamma}\right)$$

相加平均・相乗平均の関係より $\dfrac{1}{\sin\gamma\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta}+\dfrac{1}{\sin\beta\sin\gamma}\geqq\dfrac{3}{\sqrt[3]{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}}$

等号成立は、$\dfrac{1}{\sin\gamma\sin\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{1}{\sin\beta\sin\gamma}$ のときである。

$\dfrac{1}{\sin\gamma\sin\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha\sin\beta}$ のとき、$\dfrac{1}{\sin\gamma}=\dfrac{1}{\sin\beta}$ である。同様にして $\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{\sin\beta}=\dfrac{1}{\sin\gamma}$ が示されるから、

等号成立条件は、$\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$ と同値である。

$\sin\alpha=\sin\beta$ のとき、$\beta=\alpha$ または $\beta=\pi-\alpha$ であるが、$\beta=\pi-\alpha$ のとき $a+\beta=\pi$ 、$\gamma=0$ となり、不適。

結局、$\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$ のとき、$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ である。

$$\therefore \frac{1}{r}\geqq\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6}}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}=2 \quad \therefore r\leqq\frac{1}{2} \quad \text{（証明終）}$$

（注）

$n=3$ のときの、相加平均・相乗平均の関係の証明を示しておく。

$a,\ b,\ c$ を正の数とすると

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=\frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\right\}\geqq 0$$

したがって　$\therefore a^3+b^3+c^3\geqq 3abc$　等号成立は $a=b=c$ のとき。

$a^3=x_1,\ b^3=x_2,\ c^3=x_3$ と置き換えれば　$\therefore x_1+x_2+x_3\geqq 3\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$　等号成立は $x_1=x_2=x_3$ のとき。

（解答 2）

$$r=\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$$

$r \leqq \dfrac{1}{2}$ とすると　$2r \leqq 1$　$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqq \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=2\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\\&=2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)\\&=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}\right)=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\&=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\end{aligned}$$

$$4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=32\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$32\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\leqq 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$\cos\dfrac{\alpha}{2}>0,\ \cos\dfrac{\beta}{2}>0,\ \cos\dfrac{\gamma}{2}>0$ であるから　$8\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}\leqq 1$　$\therefore \sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}\leqq\dfrac{1}{8}$

$r\leqq\dfrac{1}{2}$ は、$\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}\leqq\dfrac{1}{8}$ と同値であるから、これを示す。

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}&=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)\\&=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}=\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta-\frac{1-\cos\alpha}{2}\cdot\frac{1-\cos\beta}{2}\\&=\frac{1}{4}\sin\alpha\sin\beta-\frac{1}{4}(1-\cos\alpha-\cos\beta+\cos\alpha\cos\beta)=\frac{1}{4}\left\{\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)-1\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos(\alpha+\beta)-1\right\}\end{aligned}$$

ここで、$\alpha+\beta=\theta\ (0<\theta<\pi)$ とすると　$\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{1}{4}\left(2\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\theta-1\right)$

θ を固定して考えると、右辺は $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=1$ のとき、すなわち $\alpha=\beta=\dfrac{\theta}{2}$ のとき最大となるから

$$\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}&\leqq\frac{1}{4}\left(2\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta-1\right)=\frac{1}{4}\left\{2\cos\frac{\theta}{2}-\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)-1\right\}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\\&=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\leqq\frac{1}{8}\end{aligned}$$

したがって、$\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}\leqq\dfrac{1}{8}$ が成立し、$r\leqq\dfrac{1}{2}$ が示された。（証明終）

等号成立は　$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$　$\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$ のときである。