

2006 年京大後期理 5

この容器は、最上部の半径 R 、高さ H の円錐形である。

原点から水面までの高さが h であるとき、水面の半径は $\frac{hR}{H}$ である。

このとき、タンクからの排水量は

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi \frac{h^2 R^2}{H^2} \cdot h = \frac{1}{3}\pi R^2 \left(H - \frac{h^3}{H^2} \right)$$

h は時間 t の関数である。排水を始めたときを $t=0$ とし、 t の単位は分とする。

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dV(t)}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = -\pi R^2 \cdot \frac{h^2}{H^2} \cdot \frac{dh}{dt} = \sqrt{h} \quad h^{\frac{3}{2}} dh = -\frac{H^2}{\pi R^2} dt \quad \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} = -\frac{H^2}{\pi R^2} t + C$$

$$t=0 \text{ において、} h=H \text{ であるから } \therefore C = \frac{2}{5} H^{\frac{5}{2}} \quad \frac{H^2}{\pi R^2} t = \frac{2}{5} (H^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}}) \quad \therefore t = \frac{2\pi R^2}{5H^2} (H^{\frac{5}{2}} - h^{\frac{5}{2}})$$

$$\text{すべての水を排出したとき、} h=0 \text{ であるから } t = \frac{2\pi R^2}{5H^2} \cdot H^{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}\pi R^2 \sqrt{H}$$

$$\text{求める時間は } \therefore t = \frac{2}{5}\pi R^2 \sqrt{H} \quad \dots\dots (\text{答})$$

