2006年京大理 $\boxed{2}$

$\overrightarrow{AB}=(2,\ 2,\ -2)$ であるから、線分 AB 上の点を Q とすると、$0 \leqq s \leqq 1$ として

$$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2s\\1+2s\\2-2s\end{pmatrix}$$

線分 OP と線分 AB が交点を持つとき、$\overrightarrow{OP}=u\overrightarrow{OQ}$ となるような u $(u \geqq 1)$ が存在する。

$$\begin{pmatrix}5+t\\9+2t\\5+3t\end{pmatrix}=u\begin{pmatrix}2s\\1+2s\\2-2s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2su\\u+2su\\2u-2su\end{pmatrix}\qquad \begin{array}{ll}5+t=2su & \text{——①}\\ 9+2t=u+2su & \text{——②}\\ 5+3t=2u-2su & \text{——③}\end{array}$$

②−①より　$4+t=u$ ——④　②＋③より　$14+5t=3u$ ——⑤

④、⑤より　$14+5t=12+3t$　$2t=-2$　$\therefore t=-1$　$\therefore u=3$　これは $u \geqq 1$ を満たす。

①より　$4=6s$　$\therefore s=\dfrac{2}{3}$　これは $0 \leqq s \leqq 1$ を満たす。

$s=\dfrac{2}{3},\ t=-1,\ u=3$ のとき、①、②、③は成立。

以上により、線分 OP と線分 AB が交点を持つような実数 t として、$t=-1$ が存在する。（証明終）

このとき、交点 Q は、$s=\dfrac{2}{3}$ を代入して　$\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{7}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ ……(答)