2007年京大文$\boxed{5}$

命題pは誤りである。

あるにnついて、$\sqrt{n}$と$\sqrt{n+1}$がともに有理数であると仮定する。

nが整数なので、その平方根が有理数ならば、整数である。$n+1$についても同様。

$\sqrt{n}=a,\ \sqrt{n+1}=b$とおく。$a,\ b$は自然数である。

このとき、nを消去すると　$b^2=a^2+1$　$b^2-a^2=(b+a)(b-a)=1$

$b+a=b-a=1$でなければならないが、このとき$a=0,\ b=1$となり、$n=0$となるから不適。

したがって、仮定は誤りであり、命題pは誤りである。

命題qは正しい。

あるにnついて、$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$が有理数であると仮定する。

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{b}{a}$とおく。$a,\ b$は互いに素な自然数である。$\sqrt{n+1}=\sqrt{n}+\dfrac{b}{a}$より

$$n+1=n+\frac{2b}{a}\sqrt{n}+\frac{b^2}{a^2}\qquad \frac{2b}{a}\sqrt{n}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}\qquad \therefore\sqrt{n}=\frac{a^2-b^2}{2ab}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\ \text{——①}$$

$$\therefore\sqrt{n+1}=\sqrt{n}+\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\ \text{——②}$$

①、②より、$\sqrt{n}$と$\sqrt{n+1}$は、ともに有理数である。

ところが、$\sqrt{n}$と$\sqrt{n+1}$がともに有理数であることはないので、矛盾する。

したがって、仮定は誤りであり、命題qは正しい。