2007年京大理甲$\boxed{2}$乙$\boxed{2}$共通

$y>0$ より　$a_{n+1}=xa_n+y^{n+1}$　$\dfrac{a_{n+1}}{y^{n+1}}=\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{a_n}{y^n}+1$

$\dfrac{x}{y}\neq 1$ であるから　$\dfrac{a_{n+1}}{y^{n+1}}-\dfrac{y}{y-x}=\dfrac{x}{y}\left(\dfrac{a_n}{y^n}-\dfrac{y}{y-x}\right)$　$\dfrac{a_n}{y^n}-\dfrac{y}{y-x}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-1}\left(\dfrac{a_1}{y}-\dfrac{y}{y-x}\right)=-\dfrac{y}{y-x}\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-1}$

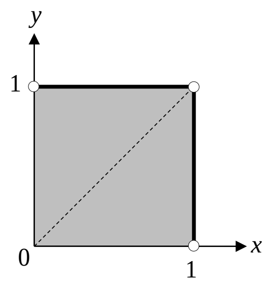
$\dfrac{a_n}{y^n}=\dfrac{y}{y-x}\left\{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-1}\right\}$　$a_n=\dfrac{y^{n+1}}{y-x}\left\{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-1}\right\}$

$\dfrac{x}{y}<1$ のとき　$1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-1}\to 1$ であるから、$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ が有限値に収束する条件は　$\therefore 0<y\leqq 1$

$\dfrac{x}{y}>1$ のとき　$a_n=\dfrac{y^{n+1}}{y-x}\cdot\left(\dfrac{x}{y}\right)^{n-1}\left\{\left(\dfrac{y}{x}\right)^{n-1}-1\right\}=\dfrac{y^2x^{n-1}}{y-x}\left\{\left(\dfrac{y}{x}\right)^{n-1}-1\right\}$

$\left(\dfrac{y}{x}\right)^{n-1}-1\to -1$ であるから、$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ が有限値に収束する条件は　$\therefore 0<x\leqq 1$

以上により　$x<y$ のとき $0<y\leqq 1$、$x>y$ のとき $0<x\leqq 1$
図示すると、右図の通り。
境界線は太線部のみ含み、軸上および $y=x$ 上は含まない。



(注)

$a_n=\dfrac{y^2(y^{n-1}-x^{n-1})}{y-x}$ という形にしてしまうと、論証しにくい。