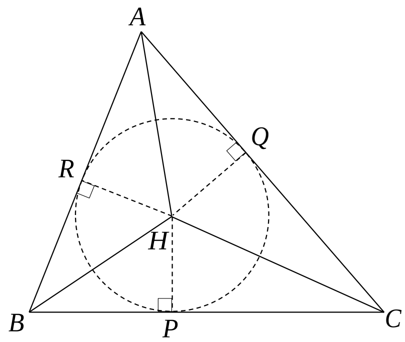
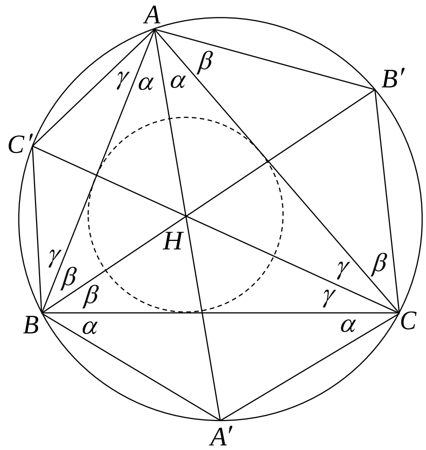
2007 年京大理甲 $\boxed{4}$



右図のように、BB' と CC' の交点を H とする。
H から辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足を、P, Q, R とする。
BH は $\angle B$ の二等分線であるから　$HP = HR$
CH は $\angle C$ の二等分線であるから　$HP = HQ$
すると、$HQ = HR$ であるから、AH は $\angle A$ の二等分線である。
すなわち、$\angle A$ の二等分線は H を通るから、
3 直線 AA', BB', CC' は、1 点 H で交わる。（証明終）



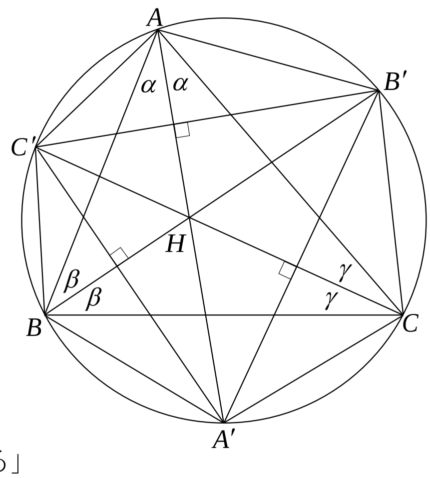
$\angle BAA' = \angle CAA' = \alpha,\ \angle CBB' = \angle ABB' = \beta,\ \angle ACC' = \angle BCC' = \gamma$ とする。

円周角の定理により
　$A'B = A'C,\ B'C = B'A,\ C'A = C'B$
　$\angle A'BC = \angle A'CB = \alpha,\ \angle B'CA = \angle B'AC = \beta,\ \angle C'AB = \angle C'BA = \gamma$

$\angle A'BH = \alpha + \beta,\ \angle A'HB = \angle HAB + \angle HBA = \alpha + \beta$ より、
$\triangle A'BH$ は二等辺三角形であるから
　$\therefore A'B = A'H$　　$\therefore A'B = A'H = A'C$

$\angle B'CH = \beta + \gamma,\ \angle B'HC = \angle HBC + \angle HCB = \beta + \gamma$ より、$\triangle B'CH$ は二等辺三角形であるから
　$\therefore B'C = B'H$　　$\therefore B'C = B'H = B'A$

$\angle C'AH = \gamma + \alpha,\ \angle C'HA = \angle HCA + \angle HAC = \gamma + \alpha$ より、$\triangle C'AH$ は二等辺三角形であるから
　$\therefore C'A = C'H$　　$\therefore C'A = C'H = C'B$



すると、
　$B'A = B'H,\ C'A = C'H,\ C'B = C'H,\ A'B = A'H,\ A'C = A'H,\ B'C = B'H$
より、$B'C', C'A', A'B'$ は、それぞれ HA, HB, HC の垂直二等分線
である。

したがって、$AA' \perp B'C', BB' \perp C'A', CC' \perp A'B'$ であるから、
H は $\triangle A'B'C'$ の垂心と一致する。（証明終）

※「H は $\triangle ABC$ の内心なので、3 直線 AA', BB', CC' は、1 点 H で交わる」
　で済ませてしまうのはだめなのだろうか？

2007年京大理乙 $\boxed{4}$

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=R$ 、$\angle AOB=\alpha,\ \angle BOC=\beta,\ \angle COA=\gamma$ とすると、

$\vec{a}\cdot\vec{b}=R^2\cos\alpha,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=R^2\cos\beta,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=R^2\cos\gamma$ である。

$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b},\ \overrightarrow{OQ}=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c},\ \overrightarrow{OR}=\frac{3}{5}\vec{c}+\frac{2}{5}\vec{a}$ であり、△ PQR の外心が O と一致する条件は、

$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{OQ}\right|=\left|\overrightarrow{OR}\right|$ であることであるから

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=\frac{9}{25}\left|\vec{a}\right|^2+\frac{12}{25}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{25}\left|\vec{b}\right|^2=\frac{R^2(13+12\cos\alpha)}{25}$$

同様に、$\left|\overrightarrow{OQ}\right|^2=\frac{R^2(13+12\cos\beta)}{25},\ \left|\overrightarrow{OR}\right|^2=\frac{R^2(13+12\cos\gamma)}{25}$ であるから、$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\left|\overrightarrow{OQ}\right|=\left|\overrightarrow{OR}\right|$ であるとき

$\therefore \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$

ここで、余弦定理により　$AB^2=R^2+R^2-2R^2\cos\alpha=2R^2(1-\cos\alpha)$

同様に、$BC^2=2R^2(1-\cos\beta),\ CA^2=2R^2(1-\cos\gamma)$ であるから、$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$ のとき

$\therefore AB=BC=CA$

したがって、△ ABC は正三角形である。……（答）