2007年京大理甲 $\boxed{5}$

1次変換 g を表す行列を求める。 $P(p,\ q)$ の g による像が、 $P'(p',\ q')$ であるとき
PP' の中点は $y=(\tan\alpha)x$ 上にあるので

$$\frac{q+q'}{2}=(\tan\alpha)\frac{p+p'}{2} \qquad (\tan\alpha)p'-q'=-(\tan\alpha)p+q \quad \text{——①}$$

$\overrightarrow{PP'}=(p'-p,\ q'-q)$ は、 $y=(\tan\alpha)x$ と直交するので

$$1\cdot(p'-p)+(\tan\alpha)(q'-q)=0 \qquad p'+(\tan\alpha)q'=p+(\tan\alpha)q \quad \text{——②}$$

①、②より

$$(\tan^2\alpha+1)p'=(1-\tan^2\alpha)p+2(\tan\alpha)q$$

$$\therefore p'=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}p+\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}q=(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)p+2(\sin\alpha\cos\alpha)q=(\cos2\alpha)p+(\sin2\alpha)q$$

$$(\tan^2\alpha+1)q'=2(\tan\alpha)p-(1-\tan^2\alpha)q$$

$$\therefore p'=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}p-\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}q=2(\sin\alpha\cos\alpha)p-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)q=(\sin2\alpha)p-(\cos2\alpha)q$$

以上により、 $\begin{pmatrix}p'\\q'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ であるから、 g を表す行列は $\begin{pmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha\end{pmatrix}$ である。

$f\circ g$ を表す行列は

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3}\cos2\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\sin2\alpha & \cos\frac{\pi}{3}\sin2\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\cos2\alpha\\ \cos\frac{\pi}{3}\sin2\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\cos2\alpha & -\cos\frac{\pi}{3}\cos2\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin2\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right) & \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\\ \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right) & -\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ より、 $f\circ g$ を表す行列は $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ に等しいから $\quad\therefore\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=1,\ \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=0$

$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より $\quad -\frac{2}{3}\pi<2\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{4}{3}\pi \quad 2\alpha+\frac{\pi}{3}=0 \quad \therefore\alpha=-\frac{\pi}{6}$ ……(答)

2007年京大理乙$\boxed{5}$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$において、$p=a+d,\ q=ad-bc$とすると、ケーリー・ハミルトンの定理より　$A^2=pA-qE$

両辺にAをかけると　$A^3=pA^2-qA=p(pA-qE)+qA=(p^2-q)A-pqE$

実数$p_l,\ q_l$により、$A^l=p_lA+q_lE$と表せるとき、両辺にAをかけると

$A^{l+1}=p_lA^2+q_lA=p_l(pA+qE)+q_lA=(pp_l+q_l)A+qp_lE$

$p_{l+1}=pp_l+q_l,\ q_{l+1}=qp_l$とすれば、実数$p_{l+1},\ q_{l+1}$により、$A^{l+1}=p_{l+1}A+q_{l+1}E$と表せる。

実数$p_m,\ q_m$により、$A^m=p_mA+q_mE$と表すことができるから、$A^m\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$より

$A^m\overrightarrow{x_0}=p_mA\overrightarrow{x_0}+q_m\overrightarrow{x_0}=p_m\overrightarrow{x_1}+q_m\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$　　$\therefore p_m\overrightarrow{x_1}=(1-q_m)\overrightarrow{x_0}$

$p_m\neq 0$のとき　$\overrightarrow{x_1}=\dfrac{1-q_m}{p_m}\overrightarrow{x_0}$　　$\overrightarrow{x_1}$は$\overrightarrow{x_0}$の定数倍であるから、$\overrightarrow{x_1}=k\overrightarrow{x_0}$とおける。

両辺にAをかけると　$A\overrightarrow{x_1}=kA\overrightarrow{x_0}$　　$\therefore \overrightarrow{x_2}=k\overrightarrow{x_1}$　以下同様にして、$\overrightarrow{x_{n+1}}=k\overrightarrow{x_n}$がわかる。

$\overrightarrow{x_m}=k\overrightarrow{x_{m-1}}=k^2\overrightarrow{x_{m-2}}=\cdots=k^m\overrightarrow{x_0}$より、$\overrightarrow{x_m}=\overrightarrow{x_0}$が成り立つとき、$\overrightarrow{x_0}\neq\vec{0}$であるから　$\therefore k^m=1$

mが奇数のとき、$k=1$だが、$\overrightarrow{x_1}=\overrightarrow{x_0}$となり、条件に反する。

mが偶数のとき、同様に$k=1$は条件に反する。$k=-1$のとき、$\overrightarrow{x_2}=\overrightarrow{x_0}$となり、やはり条件に反する。

したがって、$p_m=0$でなければならず、$\vec{0}=(1-q_m)\overrightarrow{x_0}$となる。$\overrightarrow{x_0}\neq\vec{0}$であるから　$1-q_m=0$　　$\therefore q_m=1$

以上により、$p_m=0,\ q_m=1$しかあり得ないから　$\therefore A^m=E$　（証明終）

※1996年理系$\boxed{3}$に、類題あり。