2007 年京大理甲 $\boxed{6}$

$f(x) = xe^{1-x}$ とすると

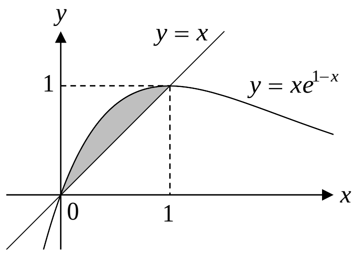
$$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$$

$$f''(x) = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = (x-2)e^{1-x}$$

| $x$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ＋ | 0 | − | − | − |
| $f''(x)$ | − | − | − | 0 | ＋ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | | ↘ |

増減、凹凸は右の通り。
$y = f(x)$ は $0 \leqq x \leqq 1$ において単調増加で、上に凸である。

$y = f(x)$ と $y = x$ のグラフで囲まれた部分を図示すると、右図の通り。
$y = f(x)$ と直線 $x = 1$ と $x$ 軸で囲まれた部分を、$x$ 軸の周りに回転してできる立体から、底面の半径1、高さ1の円錐をくり抜けばよい。




求める体積は

$$\pi\int_0^1 x^2 e^{2-2x}dx - \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1 = \pi\left[-\frac{1}{2}x^2 e^{2-2x}\right]_0^1 + \pi\int_0^1 xe^{2-2x}dt - \frac{\pi}{3} = -\frac{5}{6}\pi + \pi\left[-\frac{1}{2}xe^{2-2x}\right]_0^1 + \frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{2-2x}dt$$

$$= -\frac{4}{3}\pi + \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{2-2x}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}e^2 - \frac{19}{12}\pi = \pi\left(\frac{1}{4}e^2 - \frac{19}{12}\right) \quad \cdots\cdots(答)$$

2007年京大理乙 $\boxed{6}$

(1)

$$f(a+b)-f(a)=\frac{f(a)+f(b)-\{1+f(a)f(b)\}f(a)}{1+f(a)f(b)}=f(b)\cdot\frac{1-\{f(a)\}^2}{1+f(a)f(b)}$$

$$\frac{f(a+b)-f(a)}{b}=\frac{f(b)}{b}\cdot\frac{1-\{f(a)\}^2}{1+f(a)f(b)}$$

両辺を $b\to 0$ とすると、$\lim_{b\to 0}\frac{f(a+b)-f(a)}{b}=f'(a)$、$\lim_{b\to 0}\frac{f(b)}{b}=\lim_{b\to 0}\frac{f(0+b)-f(0)}{b}=f'(0)=1$ であるから

$$\therefore f'(a)=1-\{f(a)\}^2$$

$f(a)=1$ のとき　$f(a+b)=\frac{1+f(b)}{1+f(b)}=1$　$f(a)=-1$ のとき　$f(a+b)=\frac{-1+f(b)}{1-f(b)}=-1$

いずれにしても、$f(x)$ は定数関数になり、$f'(0)=1$ とはならなから、不適。　$\therefore f(a)\neq\pm 1$

$$\frac{f'(a)}{1-\{f(a)\}^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+f(a)}+\frac{1}{1-f(a)}\right)f'(a)=1\qquad\left(\frac{1}{1+f(a)}+\frac{1}{1-f(a)}\right)f'(a)=2$$

両辺積分すると　$\log|1+f(a)|-\log|1-f(a)|=\log\left|\frac{1+f(a)}{1-f(a)}\right|=2a+C$

$f(0)=0$ より　$\log\left|\frac{1+f(a)}{1-f(a)}\right|=2a$　$\frac{1+f(a)}{1-f(a)}=e^{2a}$　$1+f(a)=e^{2a}(1-f(a))$　$\therefore f(a)=\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}$

$$f'(a)=\frac{2e^{2a}(e^{2a}+1)-(e^{2a}-1)\cdot 2e^{2a}}{(e^{2a}+1)^2}=\frac{4e^{2a}}{(e^{2a}+1)^2}>0$$

$\lim_{a\to-\infty}f(a)=-1,\ \lim_{a\to+\infty}f(a)=1$ であるから、任意の実数 $a$ に対して　$\therefore -1<f(a)<1$　（証明終）

(2)

$f'(x)=\frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ であるから

$$f''(x)=\frac{8e^{2x}(e^{2x}+1)^2-4e^{2x}\cdot 2(e^{2x}+1)\cdot 2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^4}=\frac{8e^{2x}(e^{2x}+1)-16e^{4x}}{(e^{2x}+1)^3}=\frac{8e^{2x}(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^3}$$

$x>0$ のとき、$f''(x)<0$ であるから、上に凸である。（証明終）

(注)

$f(x)$ を求める必要はないが、微分方程式の知識があれば、具体的に求められる。

$f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\tanh x$ は、双曲線関数の1つであり、以下のように定義される。

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\ \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\ \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$f(x)$ を求めないで処理するとしても、$f'(a)=1-\{f(a)\}^2$ を導くことがポイントになる。