2008年京大理甲 $\boxed{4}$ 文 $\boxed{3}$ 共通

$x^2+ax+1=0$ ——① $3x^2+ax-3=0$ ——②

①について $D=a^2-4=(a+2)(a-2)$ であるから

$-2<a<2$ のとき $D<0$ であり、①の実数解は0個。

$a=\pm 2$ のとき $D=0$ であり、①の実数解は1個。

$a<-2,\ 2<a$ のとき $D>0$ であり、①の実数解は2個。

②について $D=a^2+36>0$ であるから、②は常に2個の実数解を持つ。

①と②が共通の実数解を持つ場合を考える。②−①より $2x^2-4=0$ $\therefore x^2-2=0$ ——③

①と②の共通の実数解は、③の実数解でもあるから、共通解としてあり得るのは $\therefore x=\pm\sqrt{2}$

$x=\sqrt{2}$ を①に代入すると $2+\sqrt{2}a+1=0$ $\therefore a=-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

①は $x^2-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}x+1=(x-\sqrt{2})\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ $\therefore x=\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

②は $3x^2-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}x-3=3(x-\sqrt{2})\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ $\therefore x=\sqrt{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x=-\sqrt{2}$ を①に代入すると $2-\sqrt{2}a+1=0$ $\therefore a=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

①は $x^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}x+1=(x+\sqrt{2})\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ $\therefore x=-\sqrt{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

②は $3x^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}x-3=3(x+\sqrt{2})\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$ $\therefore x=-\sqrt{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$2<\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ であるから、以上まとめると

$-2<a<2$ のとき2個、$a=\pm 2,\ \pm\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ のとき3個、$a<-2,\ 2<a$ かつ $a\neq\pm\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ のとき4個 ……(答)