2008 年京大文 $\boxed{4}$

$t=\sin x+\cos x$ とおくと、$t^2=1+2\sin x\cos x$ より　$\therefore \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

また、$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ で、$\dfrac{\pi}{4}\leqq x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$ より　$\therefore -\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)^3-3\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=t^3-\frac{3}{2}(t^2-1)t=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t$$

$$2\sqrt{2}(\sin^3 x+\cos^3 x)+3\sin x\cos x=\sqrt{2}(-t^3+3t)+\frac{3}{2}(t^2-1)=0$$

$$2\sqrt{2}(-t^3+3t)+3(t^2-1)=0 \qquad 2\sqrt{2}t^3-3t^2-6\sqrt{2}t+3=0$$

$f(t)=2\sqrt{2}t^3-3t^2-6\sqrt{2}t+3$ とおくと　$f'(t)=6\sqrt{2}t^2-6t-6\sqrt{2}=6(\sqrt{2}t+1)(t-\sqrt{2})$

$f(t)$ の増減は右の通り。$t=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で極大、$t=\sqrt{2}$ で極小。

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$f(-\sqrt{2})=-8-6+12+3=1>0$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1-\frac{3}{2}+6+3=\frac{13}{2}>0$$

$$f(\sqrt{2})=8-6-12+3=-7<0$$

したがって、$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ の範囲で、$f(t)=0$ の実数解は 1 つのみである。

この実数解を α とすると、$f(0)=3>0$ より、$0<\alpha<\sqrt{2}$ である。

このとき、$\alpha=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ に対応する x は、2 つ存在するので、求める個数は　2 個　……(答)